

中外物理学精品书系

经典系列·3

场的量子理论

胡宁 著


北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

中外物理学精品书系·经典系列3

场的量子理论

胡 宁（1916–1997），江苏宿迁人。著名理论物理学家，杰出的教育家，中国基本粒子理论和广义相对论研究的奠基人之一，中国科学院首届学部委员（院士）。1938年毕业于西南联大物理系，1943年获美国加州理工学院博士学位。1938–1941年任西南联大物理系助教。1945–1950年先后到爱尔兰都柏林高等研究院、丹麦哥本哈根大学理论物理研究所、美国康奈尔大学原子核研究所、美国威斯康星大学和加拿大渥太华国家研究院等地从事研究工作。1950–1997年任北京大学物理系教授，1983年任北京大学理论物理研究所首任所长。从1952年起，先后兼任中国科学院近代物理研究所（原子能研究所，高能物理研究所）和理论物理研究所研究员。1956–1959年间，赴苏联杜布纳联合核子研究所工作，并担任该所学术委员和理论研究组组长。

他在双星系统的引力辐射、核力的介子理论和色散关系理论等方面都做出过有重要国际影响的工作。培养并带领国内研究人员在高能多粒子产生理论、强相互作用理论和强子内部结构的层子模型理论等方面取得了重要成果。培养了于敏、杨国桢院士等研究生。著作《电动力学》和《场的量子理论》是国内同领域最早的教材。

ISBN 978-7-301-20446-7



定价：34.00元



中 外 物 理 学 精 品 书 系

经 典 系 列 · 3

场的量子理论

胡 宁 著


北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

场的量子理论/胡宁著.—北京:北京大学出版社,2012.4
(中外物理学精品书系·经典系列)
ISBN 978-7-301-20446-7

Ⅰ.①场… Ⅱ.①胡… Ⅲ.①量子场论 Ⅳ.①O413.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 055802 号

书　　　名:场的量子理论
著作责任者:胡　宁　著
责 任 编 辑:周月梅
标 准 书 号:ISBN 978-7-301-20446-7/O·0868
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址:http://www.pup.cn
电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752038
出版部 62754962
电 子 邮 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京中科印刷有限公司
经　销　者:新华书店
730 毫米×980 毫米　16 开本　12.5 印张　238 千字
1964 年 5 月第 1 版
2012 年 4 月第 1 版重排　2012 年 4 月第 1 次印刷
定　　　价:34.00 元

《中外物理学精品书系》
编 委 会

序　言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础，同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天，物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴，而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到，改革开放三十多年来，随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展，我国物理学取得了跨越式的进步，做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下，近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势，在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看，尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书，但系统总结物理学各门类知识和发展，深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源，并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考，仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展，特别是展现近年来中国物理学者的研究水平和成果，北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了《中外物理学精品书系》，试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家，确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富，涵盖面广，可读性强，其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结，也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示；既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态，也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说，《中外物理学精品书系》力图完整呈现近现代世界和中国物理

科学发展的全貌，是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

《中外物理学精品书系》另一个突出特点是，在把西方物理的精华要义“请进来”的同时，也将我国近现代物理的优秀成果“送出去”。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻，引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态，可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面，改革开放几十年来，我国的物理学研究取得了长足发展，一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域，使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解，不仅充分展示出中国物理学研究和积累的“硬实力”，也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的“软实力”，对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是，《中外物理学精品书系》还对中国近现代物理学科的经典著作进行了全面收录。20 世纪以来，中国物理界诞生了很多经典作品，但当时大都分散出版，如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中，读者们对这些论著也都是“只闻其声，未见其真”。该书系的编者们在这方面下了很大工夫，对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统的整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值，不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献，充分发挥其应有的传世育人的作用，更能使广大物理学人和青年学子切身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统，真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在 2006 年中国科学技术大会上指出，“加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径，是我国跻身世界科技强国的必要条件”。中国的发展在于创新，而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信，这套《中外物理学精品书系》的出版，不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣，也将进一步推动其他相关基础科学更好更快地发展，为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

中国科学院院士，北京大学教授

王恩哥

2010 年 5 月于燕园

内容简介

本书介绍理论物理的重要领域——场的量子理论. 在前三章详细讨论了场的量子化问题，具体地介绍了自由电磁场、介子场和电子场的量子理论，接着导出由相互作用拉氏函数表示的碰撞矩阵. 在第四、第五两章应用这个矩阵来计算和讨论各种基本粒子的碰撞和衰变问题. 在强相互作用部分着重介绍了塔姆-唐可夫型的近似. 在最后一章介绍了重正化理论.

本书较详细地讨论了对电磁场的标量场和纵场的各种处理方式. 在处理碰撞矩阵和重正化问题中采用了较新的观点. 本书可作综合性大学基本粒子课程的教材，也可供理论物理研究工作者参考.

目　录

第一章　引　　论

§1　薛定谔量子理论

微观运动的量子理论是从普朗克(Planck)常数 h 的引入开始的. 在 1900 年，普朗克指出由实验观察到的电磁辐射的能谱不服从经典电磁理论所预示的规律. 为着解释这个实验上观察到的能谱，必须在理论里唯象地引入一个新参数 $h=6.5\times10^{-27}$尔格·秒. 这个参数的引入意味着频率为 ν 的电磁波的能量必须是 $h\nu$ 的整数倍. 正像原子和分子是实物的最小单位一样，被普朗克称为"能量子"的能量 $h\nu$ 也是频率为 ν 的电磁波的能量的最小单位. 不久以后，爱因斯坦(Einstein)指出上述的能量的不连续性应该反映着电磁辐射的"粒子"结构，正像质量的不连续性反映着实物的粒子(原子和电子等)结构一样. 这个深刻的观点不久在光电现象的实验里得到了证实.

上述爱因斯坦的概念在光电现象中被证实以后，量子理论暂时没有继续沿着普朗克和爱因斯坦理论所指示的方向发展，却转入对原子的微观运动的探讨. 1913 年玻尔(Bohr)根据对原子光谱的分析指出：一个原子系统的能量也像电磁辐射的能量一样具有不连续性. 非相对论的量子力学在 1925 年左右建立. 在微观领域内，它完全代替了牛顿力学. 以后不久，人们发现可以根据作为非相对论量子力学的基础的薛定谔方程导出电磁辐射的能量子 $h\nu$. 这样，电磁场和实物(原子和分子)运动的能量不连续性就可由薛定谔方程统一地加以解释.

非相对论量子力学虽然成功地阐明了微观运动的能量不连续性，但它却没有触及上述由爱因斯坦提出而后来由光电现象的实验所完全证明的观点，这就是：电磁辐射的能量不连续性实际上是电磁场的粒子性所造成的. 人们在当时已经从实验中认识到，作为电磁场能量子的所谓"光子"或"光量子"，具有和电子一样的波动性和粒子性，但在非相对论量子理论里，光子和电子的地位则是完全不同的. 为着说明这一点，我们将在下面介绍一下电磁辐射的能量子是怎样由薛定谔方程导出的.

为明确起见，我们考虑在边长为 L 的立方形的、具有完全反射壁的容器内的电磁辐射. 这个电磁场可由矢量势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 来描写，其中 $\boldsymbol{r}$ 是容器内任一点的坐标，t 代表时间变数. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 满足下面波动方程：

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=0. \tag{1.1}$$

除(1.1)外$\boldsymbol{A}$还须满足洛伦兹(Lorentz)辅助条件,在所谓"洛伦兹规范"中这个条件可写为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=0. \tag{1.2}$$

我们可取容器的中点为坐标的原点,并取x,y,z轴平行于立方体的三边.我们可以假定,在容器的壁上$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$是周期的,即$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$满足下面边界条件:

$$\boldsymbol{A}\text{ 相同,当 } x=\pm L/2,\ y=\pm L/2\text{ 或 }z=\pm L/2. \tag{1.3}$$

这是一个标准的经典电磁场问题,按照在引入普朗克理论以前人们已经习用的办法,我们可把(1.1),(1.2),(1.3)的解用下面的傅里叶(Fourier)展开式表出:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{k}\{\boldsymbol{\alpha}_k(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{\alpha}_k^*(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\}, \tag{1.4}$$

上式右边括号中引入两个相加的复数共轭项是为了保证$\boldsymbol{A}$值是实数.满足条件(1.3)的$\boldsymbol{k}$由下式给出:

$$k_x=\frac{2\pi}{L}n_x,\quad k_y=\frac{2\pi}{L}n_y,\quad k_z=\frac{2\pi}{L}n_z, \tag{1.5}$$

n_x,n_y,n_z为整数;因此(1.4)式中对$\boldsymbol{k}$的求和代表对所有的整数值n_x,n_y,n_z的求和.每一个$\boldsymbol{k}$值代表一个沿$\boldsymbol{k}$方向前进的、频率为$\nu_k=c(n_x^2+n_y^2+n_z^2)^{1/2}/L$的单色波.$\boldsymbol{\alpha}_k(t)$满足下面的运动方程:

$$\begin{gathered}\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{\alpha}_k(t)+\omega_k^2\boldsymbol{\alpha}_k(t)=0,\\ \omega_k=2\pi\nu_k=ck,\end{gathered} \tag{1.6}$$

$\boldsymbol{\alpha}_k(t)$代表频率为ν_k、前进矢量为$\boldsymbol{k}$的单色波的振动,k为矢量$\boldsymbol{k}$的模.由(1.6)我们看到这个振动是一个简谐振动.

变换(1.4)的作用是把由(1.1)描写的在容器内电磁辐射的连续运动表达为无穷多个(因为由(1.5)式决定的$\boldsymbol{k}$值有无穷多个)简谐振动(1.6).因为简谐运动是我们所熟悉的运动,所以引入变换(1.4)式可以造成求解的方便.这个变换把一个偏微分方程变换成无穷多个较易处理的全微分方程.在力学上这个变换属于正则变换.一个力学体系的拉氏函数以及它所满足的变分原理和正则运动方程的形式在正则变换下是不变的.

如果我们接受薛定谔方程作为微观区域运动的普遍规律,那就必须考虑对简谐振动(1.6)进行量子化的问题.必须指出,这样做已经意味着对量子理论的推广,因为量子力学过去所处理的对象是在普通空间的一个质点的运动,而(1.6)式所描绘的则是电磁波的振动.但是人们发现,当对简谐振动(1.6)像对运动的质点一样进行量子化以后,由相应的薛定谔方程立刻可以导出普朗克理论里的能量子.这说明实物和电磁场的微观运动都遵循着完全相同的规律.

为着写出相应于简谐运动(1.6)的薛定谔方程，我们必须首先找到这个运动体系的正则动量$\boldsymbol{P}_k(t)$和正则坐标$\boldsymbol{Q}_k(t)$. 不难看出$\boldsymbol{P}_k(t)$，$\boldsymbol{Q}_k(t)$和$\boldsymbol{\alpha}_k(t)$都满足(1.6)式，所以在一般情况下，$\boldsymbol{\alpha}_k(t)$是$\boldsymbol{P}_k(t)$和$\boldsymbol{Q}_k(t)$的一个线性的组合. 为着找出$\boldsymbol{P}_k(t)$和$\boldsymbol{Q}_k(t)$，我们首先给出电磁辐射的总哈密顿量H或总能量E的式子. 根据经典的电动力学，我们立刻写出

$$H = E = \frac{1}{2}\int(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2)\mathrm{d}V, \tag{1.7}$$

式中$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$分别代表电场和磁场强度. 积分是对整个容器内的空间的积分. 在这里和以后，我们将都用洛伦兹-亥维赛(Lorentz-Heaviside)单位系统，因此在通常单位中出现的因子$(4\pi)^{-1}$将不出现. 在"洛伦兹规范"($\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$)中，$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$与$\boldsymbol{A}$的关系为

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A}. \tag{1.8}$$

我们可以选取(1.6)的解为

$$\boldsymbol{\alpha}_k(t) = \boldsymbol{\alpha}_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t},$$

这样选择并没有丧失解(1.4)的普遍性. 把(1.4)和(1.8)两式代入(1.7)，并利用上式得

$$H = 2V\sum_k k^2 \boldsymbol{\alpha}_k^*(t) \cdot \boldsymbol{\alpha}_k(t), \tag{1.9}$$

式中$V = L^3$. 引入下面定义：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_k &= \frac{\mathrm{i}}{2k\sqrt{V}}(\boldsymbol{P}_k - \mathrm{i}ck\boldsymbol{Q}_k), \\ \boldsymbol{\alpha}_k^* &= \frac{-\mathrm{i}}{2k\sqrt{V}}(\boldsymbol{P}_k + \mathrm{i}ck\boldsymbol{Q}_k). \end{aligned} \tag{1.10}$$

于是(1.9)式变为

$$H = \frac{1}{2}\sum_k(\boldsymbol{P}_k^2 + \omega_k^2\boldsymbol{Q}_k^2), \tag{1.11}$$

上式给出用正则动量$\boldsymbol{P}_k$和正则坐标$\boldsymbol{Q}_k$表出的无穷多个简谐振动的总哈密顿量. (1.10)式给出$\boldsymbol{P}_k$和$\boldsymbol{Q}_k$与$\boldsymbol{\alpha}_k$间的关系.

得出了正则变数$\boldsymbol{P}_k$和$\boldsymbol{Q}_k$以后，我们可以立刻写出描绘简谐振动$\boldsymbol{k}$的薛定谔方程：

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2}\nabla_Q^2 + \frac{1}{2}\omega_k^2 Q^2\right)\psi_k(\boldsymbol{Q}) = \epsilon_n^{(k)}\psi_k(\boldsymbol{Q}), \tag{1.12}$$

式中$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_k$, $\nabla_Q = (\partial/\partial Q_x, \partial/\partial Q_y, \partial/\partial Q_z)$, $\hbar = h/2\pi$, $\psi_k(\boldsymbol{Q})$代表相应于前进矢量$\boldsymbol{k}$的简谐振动的薛定谔波函数.

由洛伦兹条件$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$，我们看到矢量$\boldsymbol{Q}$是与$\boldsymbol{k}$垂直的，因此(1.6)式和

(1.12)所描绘的简谐振动只是在垂直于 k 平面内的运动. 命 Q_1 和 Q_2 为 Q 在这个平面内沿着两个垂直方向的分量，于是(1.12)可以分解为两个独立的一维运动：

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{d}{dQ_s}\right)^2+\frac{1}{2}\omega_k^2Q_s^2\right]\psi_{ks}(Q_s)=\varepsilon_n^{(k,s)}\psi_{ks}(Q_s)\quad(s=1,2),\tag{1.13}$$

上式的解是我们所熟知的. (1.13)所给出的本征值 $\varepsilon_n^{(k,s)}$ 取不连续的值：

$$\varepsilon_n^{(k,s)}=\left(n_{ks}+\frac{1}{2}\right)h\nu_k,\tag{1.14}$$

式中 n_{ks} 是零或正整数. 上式所给出的能级间隔正是普朗克所引人的能量子 $h\nu_k$.

上面的推导说明，把描绘微观质点运动的薛定谔方程推广应用于电磁运动立即给出普朗克的能量子. 这个能量子只代表一个量子运动的能级间隔，正像一个氢原子的能级间隔一样. 不过对于氢原子，能级间隔不是一个与能级无关的常量，因此没有导致能量子的概念.

人们在发现了薛定谔波动方程以后，曾经认为这个方程反映出实物的波动性，因此应和描绘电磁波的麦克斯韦(Maxwell)波动方程相当. 但是不久人们不得不放弃这种看法而接受对于薛定谔波函数的几率幅的解释. 上面的推导也指出，对于电磁辐射，描写它的量子运动的几率波 ψ_k 是和描写它的经典的和宏观的波动的麦克斯韦方程的解是截然不同的两件事.

为着更清楚地对照说明在薛定谔量子理论里实物和电磁场的量子现象间的联系，在表 I 中我们给出从宏观到微观各个阶段电子和电磁场理论的对比. 从这个表我们看到，电子没有相应于麦克斯韦方程的阶段. 实物的粒子性贯穿于所有的阶段，而场的光量子只是在表的最下面的部位作为能级的间隔而出现的. 因此作为非相对论量子力学基础的薛定谔方程没有反映出爱因斯坦所提出的重要观点，即光量子是和电子一样的微观粒子.

表 I

场(电磁辐射)	实物(电子)
经典电磁场的麦克斯韦方程 $\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A=0,\nabla\cdot A=0$	
简谐振动的动量和坐标 $P_{ks}(t),Q_{ks}(t)(s=1,2)$	经典粒子的动量和坐标 $p_i(t),q_i(t)(i=1,2,3)$
量子理论的对易关系 $[P_{ks},Q_{k's'}]=-i\hbar\delta_{kk'}\delta_{ss'}$	量子理论的对易关系 $[p_i,q_j]=-i\hbar\delta_{ij}$
容器的薛定谔方程能级 $\varepsilon_{ks}=\left(n_{ks}+\frac{1}{2}\right)h\nu$	单个电子的薛定谔方程 连续的和不连续的能级

下面我们将进一步讨论描绘电磁辐射的薛定谔方程和薛定谔态矢量(波函数)

的物理意义.按照前面的定义,$\varepsilon_n^{(k,s)}$ 代表前进矢量为 $\boldsymbol{k}$,偏振为 s 的单色波所作的简谐振动的能量.容器内辐射的总能量应为相应于所有前进矢量 $\boldsymbol{k}$ 的两种不同偏振($s=1,2$)的简谐振动的能量之和.辐射所处的态可由这无穷多个简谐振动所处的态来确定,即可由无穷多个简谐振动的薛定谔态矢量的乘积来表示.因此,容器内辐射的总态矢量和总能量可写为

$$\Psi = \prod_k \psi_{k1}^{n_1}(Q_{k1})\psi_{k2}^{n_2}(Q_{k2}), \tag{1.15}$$

$$E = \sum_k \sum_{s=1}^{2}\left(n_{ks} + \frac{1}{2}\right)h\nu_k. \tag{1.16}$$

在经典理论里没有辐射存在的情况相当于量子理论里能量最低的情况,即所有简谐振动都处于基态的情况.这时(1.15)和(1.16)变为

$$\Psi_0 = \prod_k \psi_{k1}^{0}(Q_{k_1})\psi_{k2}^{0}(Q_{k_2}), \tag{1.17}$$

$$E_0 = \sum_k h\nu_k. \tag{1.18}$$

因简谐振动 $\boldsymbol{k}$ 的数目是无限的,当容器中没有辐射存在时,E_0 的值仍等于无穷大.这个无穷大的零点能不造成任何观察上的效果,如果我们以真空的态作为能量为零的态的定义,那么(1.18)即可换为 $E_0=0$.由(1.17)给出的 Ψ_0 代表没有辐射存在时的态,所以可以称为真空的态矢量.因为不管容器中有没有辐射,Ψ 都是存在的,所以我们称 Ψ 为容器的态矢量或空间的态矢量.按照这个观点,空间本身是一个力学体系,而辐射只代表空间被激发时的情况.

使得相应于(ks)的简谐振动增加和减少一个能量子 $h\nu_k$ 的算符分别为

$$c_{ks}^{*} = \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2c\hbar k}}(P_{ks} + \mathrm{i}ckQ_{ks}) = \sqrt{\frac{2kV}{c\hbar}}\alpha_{ks}^{*}, \tag{1.19}$$

$$c_{ks} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2c\hbar k}}(P_{ks} - \mathrm{i}ckQ_{ks}) = \sqrt{\frac{2kV}{c\hbar}}\alpha_{ks}. \tag{1.20}$$

由 P_{ks} 和 Q_{ks} 所满足的对易关系:

$$[P_{ks}, Q_{k's'}] = -\mathrm{i}\,\hbar\delta_{ss'}\delta_{kk'}, \tag{1.21}$$

我们立刻得到 c_{ks} 和 c_{ks}^{*} 间的对易关系:

$$[c_{ks}, c_{k's'}^{*}] = \delta_{ss'}\delta_{kk'}. \tag{1.22}$$

由上式很容易得出 c_{ks} 和 c_{ks}^{*} 在能量表象中的矩阵元:

$$\begin{aligned} \langle n_{ks}' | c_{ks} | n_{ks}\rangle &= \delta_{n_{ks}', n_{ks}-1}\sqrt{n_{ks}}, \\ \langle n_{ks}' | c_{ks}^{*} | n_{ks}\rangle &= \delta_{n_{ks}', n_{ks}+1}\sqrt{n_{ks}+1}; \end{aligned} \tag{1.23}$$

式中 $|n_{ks}\rangle$ 代表能级为 n_{ks} 的简谐振动(ks)的态.利用(1.19)和(1.20),(1.4)可写为

$$A(r) = \sum_{s=1}^{2}\sum_{k}\sqrt{\frac{c\hbar}{2kV}}\{\varepsilon_{ks}c_{ks}e^{ik\cdot r}+\varepsilon_{ks}c_{ks}^{*}e^{-ik\cdot r}\}, \tag{1.24}$$

作为薛定谔表象中的算符，上式中的 $A(r)$，c_{ks} 和 c_{ks}^{*} 都与时间无关. 式中 $\varepsilon_{ks}(s=1,2)$ 代表在垂直于 k 的平面内两个互相垂直的单位矢量，它们代表振动 Q_{ks} 的极化方向.

上面结果指出，描写空间中电磁波动的 $A(r,t)$ 是一个算符，而描写空间中电子波动的 $\psi(r,t)$ 则是一个几率振幅. 在这一点上显示出量子力学在处理实物和场的运动时所采取的不同方式.

利用(1.19)和(1.20)，我们可以把(1.11)表为

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k}\sum_{s=1}^{2}c\hbar k(c_{ks}^{*}c_{ks}+c_{ks}c_{ks}^{*}). \tag{1.25}$$

利用对易关系(1.12)，上式又可写为

$$H = \sum_{k}\sum_{s=1}^{2}c\hbar k\left(c_{ks}^{*}c_{ks}+\frac{1}{2}\right). \tag{1.26}$$

上式括号中的 1/2 只对零点能 E_0 有贡献，如果我们选取 $E_0=0$，上式可写为

$$H = \sum_{k}\sum_{s=1}^{2}c\hbar k(c_{ks}^{*}c_{ks}). \tag{1.27}$$

比较(1.14)和(1.27)，并注意到 $2\pi\nu_k=ck$，我们立刻得到

$$c_{ks}^{*}c_{ks} = n_{ks},$$

即 $c_{ks}^{*}c_{ks}$ 是一个对角的算符，它的本征值为能量子的数目 n_{ks}. 从(1.23)也可以得到同样的结果.

§2 二次量子化的物理内容，玻色子和费米子

自从非相对论量子力学在 1925 年左右完全建立以后，在其后五六年内新的发展有两个重要的方向. 一个发展方向是，由于实验发展的需要，人们要求建立起相对论的量子力学. 这就要求把薛定谔方程推广到相对论的领域里去. 人们发现有两种可能的推广，一种推广给出描写自旋为零的粒子的克莱因-戈尔登(Klein-Gordon)波动方程，另一种推广给出描写自旋为 1/2 的粒子的狄拉克(Dirac)方程. 这两种推广都导致严重的困难. 克莱因-戈尔登方程具有人们所熟知的负几率困难. 狄拉克方程则伴随着著名的负能困难. 为了避免负能困难，狄拉克曾提出所谓“空穴”理论. 经过试图消除这些困难的各方面尝试以后，人们逐渐认识到，这些困难是和对波函数的几率解释密切相关的. 因此，为了克服这些困难，必须对一些基本概念作重要的修改.

量子力学新发展的另一个方向是寻求对于场和实物的量子现象在认识上的进

一步统一. 我们从上一节的讨论看到，虽然电磁场和电子的微观运动规律都遵循着同样的量子力学的规律，但在我们的认识中实物和场的差异仍然是很大的. 量子理论虽然显示出在微观区域中实物的波动性和电磁场的原子性，但这种波动性和原子性和宏观区域中所理解的是迥然不同的. 微观区域内的所谓波动性只意味着几率分布的一种周期性，所谓原子性也只代表能量的不连续性. 这样就使得实物和场的对立在微观区域内更为复杂化，而前面所提到的光量子在光电现象里所显示的和电子一样的粒子性，却丝毫没有在理论里得到反映. 现在我们都知道，电子也可像光子一样地被放出和被吸收，而且光子和电子也可以互相转化；但在 1932 年以前这些现象还未被发现. 尽管这样，当时人们已感到必须改造以薛定谔方程为基础的量子理论，使得它更充分地显示出实物和场在波动性和粒子性两方面的对称性. 不久人们就发现，薛定谔方程所显示的上述不对称性并不是实质的，这种不对称性可以通过一个新的描述方式的引入而被消除. 这个新的方式就是所谓"二次量子化"描述方式.

"二次量子化"并不像这个词的本身所指示那样意味着在客观世界里还存在着更进一步的量子现象. 为着说明什么是二次量子化描述，我们考虑由 N 个等同粒子所构成的力学体系. 在薛定谔理论里，粒子数 N 必须事先给定，N 决定在波函数 ψ 中出现的独立变数的数目. 但是在实际观察里，粒子数往往是不确定的，这就要求把量子力学改换成一种新的形式，使得粒子数也作为像动量和坐标等一样的观察量出现. 为着使粒子数不同的态可以互相跃迁，必须引入增加和减少一个粒子的算符. 我们知道，统计规律对于粒子数的改变有着决定性的作用，比如当粒子满足费米统计时，在已被占据的态中增加一个粒子是被禁戒的. 因此，对于不同的统计规律，这些增加和减少粒子的算符必须服从完全不同的代数关系. 再者，为了描述粒子数的改变，还必须引入代表粒子数为零的态或真空态的波函数. 从这些讨论，我们立刻看到，上节中处理电磁辐射时所用的方式正是这样的对于粒子数不确定的情况的描述方式. 人们可以预料，在这个描述方式里，电子和电磁场的量子现象将显示出更大的对称性.

这个新的描述方式可以形式地由下面的步骤得出：首先我们把单粒子的薛定谔方程看成是和麦克斯韦电磁场波动方程一样的描写经典波动的方程，这个方程的解 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 也看成是和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 一样的普通空间的波动；然后对薛定谔方程进行像上节对电磁场波动方程所进行的一样的量子化.

为简单起见，我们假定 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 代表一个不受外力作用的自由粒子的波函数. 引入这个没有外力作用的假定的目的是为了可以很容易地阐明某些重要的观点. 如果不引入这个假定，计算将较为复杂，但基本思想和推算的过程仍旧是一样的. 在上述假定下，$\psi(\boldsymbol{r},t)$ 所满足的薛定谔方程可写为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t),\tag{2.1}$$

上式描写一个自由粒子的量子运动．如果我们把(2.1)看成相当于麦克斯韦方程(1.1)和(1.2)，那么我们就可考虑(2.1)式在上节所述的容器内的解．和上节一样，我们引入下面的傅里叶展开式：

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k a_k(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}},\tag{2.2}$$

在上式右边不需要加上复数共轭项，因为 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 本身是一个复数．把上式代入(2.1)，得到 $a_k(t)$ 所满足的方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_k(t)=-\mathrm{i}\varepsilon_k a_k(t),\qquad \varepsilon_k=\frac{\hbar k^2}{2m};\tag{2.3}$$

这表示 $a_k(t)$ 所代表的运动也是一个简谐振动．把(2.1)看成相当于麦克斯韦方程即意味着承认由(2.1)所描写的运动是一个经典的运动，因此也就产生这个运动的量子化的问题．通过对 t 再进行一次微分，我们由(2.3)得出下面标准的简谐振动方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}a_k(t)+\varepsilon_k^2 a_k(t)=0.\tag{2.4}$$

(2.2)的复数共轭为

$$\psi^*(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k a_k^*(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}},\tag{2.5}$$

很容易证实，$a_k^*(t)$ 也满足简谐振动方程(2.4)．

和上节讨论辐射时的情况一样，为着写出这些简谐振动的薛定谔方程，我们首先必须找出相应的正则动量 P_k 和正则坐标 Q_k．为着这个目的，我们考虑这个系统的总能量：

$$E=\int\psi^*\,\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi\mathrm{d}V=-\int\psi^*\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi\mathrm{d}V,\tag{2.6}$$

将(2.2)和(2.5)式代入，并利用(2.3)式，立刻给出

$$E=\sum_k\hbar\varepsilon_k a_k^* a_k,\quad \varepsilon_k=\frac{\hbar k^2}{2m}.\tag{2.7}$$

上式是和上节的(1.27)非常相像的，所以相应于变换(1.19)和(1.20)，我们可以引入下面的变换：

$$a_k=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\hbar\varepsilon_k}}(P_k-\mathrm{i}\varepsilon_k Q_k),$$

$$a_k^* = \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2\hbar\varepsilon_k}}(P_k + \mathrm{i}\varepsilon_k Q_k). \tag{2.8}$$

代入(2.7)得

$$E = \frac{1}{2}\sum_k (P_k^2 + \varepsilon_k^2 Q_k^2). \tag{2.9}$$

由上面结果,我们看到 P_k 和 Q_k 应为简谐振动 $\boldsymbol{k}$ 的正则动量和正则坐标. 如果我们把 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 看成经典的波动,那么相应的量子运动可以通过通常的量子化条件

$$\begin{aligned} &[P_k, Q_{k'}] = -\mathrm{i}\hbar\delta_{kk'}, \\ &[P_k, P_{k'}] = [Q_k, Q_{k'}] = 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

给出. 这个条件也可由 a_k 和 a_k^* 之间的对易关系

$$\begin{aligned} &[a_k, a_{k'}^*] = \delta_{kk'}, \\ &[a_k^*, a_{k'}^*] = [a_k, a_{k'}] = 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

来表示. 利用(2.2)和(2.5)得

$$\begin{aligned} &[\psi(\boldsymbol{r},t), \psi^*(\boldsymbol{r}',t)] = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \\ &[\psi^*(\boldsymbol{r},t), \psi^*(\boldsymbol{r}',t)] = [\psi(\boldsymbol{r},t), \psi(\boldsymbol{r}',t)] = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

应用相似于上节处理电磁辐射所用的考虑,我们可以解释 a_k 和 a_k^* 为使量子振动 $\boldsymbol{k}$ 降低和升高一个能级的算符. 这些能级的间隔为

$$\hbar\varepsilon_k = \hbar^2 k^2/2m. \tag{2.13}$$

这个能量子正是动量为 $\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}$ 的粒子的动能,而作为展开式(2.2)系数的 a_k 也正是这个粒子的几率幅.

上面我们已把薛定谔方程看作是一个经典的波动方程,然后再对它进行量子化,并且把这样得到的能量子进一步解释为薛定谔方程所描写的粒子. 现在我们就来证明这种作法是和当粒子满足玻色统计时的通常形式的非相对论量子理论完全等价的,它们之间的差异只在于表象的不同. 为着这个目的,我们只需要考虑两个粒子的情况. 在粒子数更多的情况中所需要的考虑是完全相同的. 按照本节的处理方法,我们考虑只有简谐振动 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 激发到有一个能量子的态,其余的振动都处于基态. 这个情态的态矢量可写为

$$\Psi = a_{k_1}^* a_{k_2}^* \Psi_0, \tag{2.14}$$

Ψ_0 为相应于(1.17)的真空态,亦即所有简谐振动都处于基态的情态. $a_{k_1}^* a_{k_2}^*$ 作用于 Ψ_0 使得振动 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 各处于有一个能量子的激发态.

引入

$$\psi_k(\boldsymbol{r},t) = a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \mathrm{i}\frac{\hbar k^2}{2m}t}, \tag{2.15}$$

上面所考虑的情态又可写为

$$\Psi = \psi_{k_1}^*(\boldsymbol{r}_1,t)\psi_{k_2}^*(\boldsymbol{r}_2,t)\Psi_0. \tag{2.16}$$

(2.14)和(2.16)的差别只在于前者是由动量表象 k_1,k_2 表出，而后者则由坐标表象 r_1,r_2 表出. 在这两个表象中的总哈密顿量算符分别由(2.7)和(2,6)给出. 于是 Ψ 所满足的薛定谔方程可写为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi=-\int\psi^*(\boldsymbol{r},t)\,\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t)\Psi\mathrm{d}V. \qquad (2.17)$$

真空态 Ψ_0 可由下面定义给出：

$$a_k\Psi_0=0, \qquad (2.18)$$

因为所有振动都处于基态，任何降低能级的算符作用于 Ψ_0 都不可能导致一个新的态. 由(2.15)得

$$\psi_k(\boldsymbol{r},t)\Psi_0=0. \qquad (2.19)$$

把(2.16)代入(2.17)并利用(2.11)和(2.19)，我们得到

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*_{k_1}(r_1,t)\psi^*_{k_2}(r_2,t)\Psi_0=-\sum_{i=1}^{2}\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2\psi^*_{k_1}(r_1,t)\psi^*_{k_2}(r_2,t)\Psi_0,$$

略去上式两边的 Ψ_0 并取复数共轭，我们得

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_{k_1}(r_1,t)\psi_{k_2}(r_2,t)=\sum_{i=1}^{2}\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2\psi_{k_1}(r_1,t)\psi_{k_2}(r_2,t). \qquad (2.20)$$

上式正是在通常量子理论里两个自由的玻色粒子所满足的薛定谔方程. 这证明了前面所述论点：在玻色统计的条件下，把非相对论薛定谔方程看成经典的宏观的波动方程然后进行量子化，和通常把 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 看成几率幅的非相对论量子理论是完全等价的.

现在我们解释一下"二次量子化"这一词的意义. 薛定谔方程(2.1)是从经典的质点力学经过量子化得来的. 但在上面的描述里，我们又把这个方程看成经典的和宏观的理论，然后对它再进行量子化的处理，所以人们称这个处理为二次量子化. 为着说明这并不代表在客观世界里存在着进一步的量子现象，必须正确地理解所谓"量子化"的意义. 在微观领域里，一个运动的粒子满足薛定谔波动方程，这个方程表达出这个粒子的波动性. 作为一个波动，必须有前进矢量 k 和频率 ν，作为一个粒子，必须有动量 p 和能量 E_p. 对于自由运动的粒子，这些代表波动性质的物理量和代表粒子性质的物理量间的关系是由德布罗意(de Broglie)条件给出的：

$$E=\hbar\varepsilon_k=h\nu,\quad \boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}. \qquad (2.21)$$

我们注意到普朗克常数 h 标志着这两种物理量间单位的转换. 关系(2.21)也可以表达成对易关系的形式

$$[p_i,r_j]=-\mathrm{i}\hbar\delta_{ij}\quad(i,j=1,2,3). \qquad (2.22)$$

为着使薛定谔方程(2.1)更明确地只反映出波动性，我们引入 $\lambda=2m/\hbar$，于是(2.1)变为

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t)=-\frac{1}{\lambda}\nabla^2\psi(r,t). \tag{2.23}$$

如果我们把 λ 只看成一个常数,那么上式就可看成是一个不反映任何粒子性的波动方程. 现在考虑一个前进矢量为 k 的波,从上式立刻得到这个波的频率为 $\nu=k^2/2\pi\lambda$,由(2.7)即 $E_p=p^2/2m$ 和条件(2.21),我们立刻得到 $\lambda=2m/\hbar$,这正是 λ 原来的定义. 这说明在(2.23)中我们无须确定 λ 和 $\hbar$ 与 m 间的关系,因为这个关系可以利用对易关系从最后的解里自然地得到.

上面的讨论指出,我们可以把(2.22)和(2.23)看作是描写微观的和非相对论的粒子运动的两个基本方程,前者表达出运动的粒子性,后者表达出运动的波动性. 量子现象的领域实际上是粒子性和波动性同时都重要的领域. 当波动性可被忽略时,就过渡到经典粒子力学的领域. 当粒子性变得不重要时,即过渡到经典波动的领域. 前面所说第一次量子化是由经典粒子向量子力学领域的过渡,所谓"二次量子化"是由经典波动向量子力学领域的过渡. 在这两种过渡中都必须建立粒子性的物理量和波动性的物理量间的关系,所以都必须引入代表它们之间单位转换的普朗克常数 h. 当由经典粒子过渡到量子领域时,我们利用(2.21)或(2.22)由哈密顿-雅可比方程得出薛定谔方程. 当由经典波动过渡到量子领域时,在粒子满足玻色统计的情况下,我们在经典的波动方程(2.23)之外,引入了对易关系(2.22)作为量子化条件.

从上面的推导和讨论,我们立刻看到由经典波动经过量子化所得到的"能量子"正是由经典粒子经过量子化所得到的微观粒子. 根据这个观点,上节的辐射量子理论所给出的能量子 $h\nu$ 应同时代表辐射的粒子结构,这个关于量子现象的新的理解,非常圆满地体现了爱因斯坦所提出的关于光子的概念,同时也成为以后发展起来的场的量子理论的基本思想.

在上面的处理里,我们只考虑了玻色粒子的情况. 当粒子服从费米统计时,因为不可能有两个粒子处于相同的态,由(2.9)描写的简谐振动对于任一 k 值至多只可能激发到有一个能量子的态. 这样的量子系统的升高和降低能级的算符 a_k^* 和 a_k 显然不能满足对易关系(2.11),因为按照(2.11),系统将可能跃迁到有任意个数目量子的态,因而意味着动量为 $\hbar k$ 的粒子可以有任意多个,这是和费米的统计规律相违背的. 下面我们将根据费米统计导出 a_k^* 和 a_k 所满足的对易关系应为

$$[a_k,a_{k'}^*]_+\equiv a_ka_{k'}^*+a_{k'}^*a_k=\delta_{kk'}, \tag{2.24}$$

我们称$[,]_+$为反对易括号,以区别于通常的对易括号. 为着证明(2.24),我们首先按照定义写出

$$a_k\Psi_1=\Psi_0,\quad a_k^*\Psi_0=\Psi_1, \tag{2.25}$$

式中 Ψ_0 和 Ψ_1 分别代表真空态和简谐振动 k 激发到一个量子的态. 按照前面的讨

论，Ψ_0 和 Ψ_1 也分别为真空态和一个动量为$\hbar k$ 粒子的态. 这样，降低能级的算符 a_k 即可解释为减少一个粒子的算符(或称吸收算符)，升高能级的算符 a_k^* 也可解释为增加一个粒子的算符(或称放出算符). 作为真空态，Ψ_0 满足下面条件：

$$a_k\Psi_0 = 0. \tag{2.26}$$

按照费米统计 a_k^* 作用于 Ψ_1 不可能给出新的态，因为如果有这个新态，则它将会代表两个粒子处于相同的态，所以，这个作用的结果必须为零：

$$a_k^*\Psi_1 = 0. \tag{2.27}$$

在(2.25)第一式的两边，由左乘上 a_k^*，并在(2.27)的两边由左乘上 a_k，并以这两个结果相加得

$$(a_k^*a_k + a_ka_k^*)\Psi_1 = \Psi_1;$$

同样，在(2.25)第二式的两边，由左乘上 a_k，在(2.26)的两边，由左乘上 a_k^*，并相加，我们得

$$(a_k^*a_k + a_ka_k^*)\Psi_0 = \Psi_0.$$

上面的结果指出 Ψ_0 和 Ψ_1 都是 $a_k^*a_k+a_k^*a_k$ 的本征函数，并且本征值都为 1. 按照费米统计，Ψ_0 和 Ψ_1 是除振动 $\boldsymbol{k}$ 以外其他振动都处于基态的两个仅有的可能的态. 上面结果指出，对于所有的态，$a_k^*a_k+a_ka_k^*$ 的值都是 1，唯一可能的解是

$$a_k^*a_k + a_ka_k^* = 1,$$

这正是(2.24)式当 $\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}$ 时的情形. 用同样的考虑可以证明当 $\boldsymbol{k}'\neq\boldsymbol{k}$ 时，

$$a_k^*a_{k'} + a_{k'}a_k^* = 0,$$

这就完全证明了(2.24)式.

按照费米统计，当 $a_k^*a_{k'}^*$ 作用于任意一个态 Ψ 而不使结果为零时，所得的结果必须是 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 的反对称函数，即

$$a_k^*a_{k'}^*\Psi = -a_{k'}^*a_k^*\Psi.$$

因为 Ψ 是任意的，上式要求

$$a_k^*a_{k'}^* + a_{k'}^*a_k^* = 0, \tag{2.28}$$

取上式的复数共轭得

$$a_ka_{k'} + a_{k'}a_k = 0, \tag{2.29}$$

(2.24)，(2.28)和(2.29)是当粒子满足费米统计时的对易关系.

相应于在玻色统计情况里 ψ 所满足的对易关系(2.12)，我们得费米情况的对易关系为

$$\begin{aligned}&[\psi(\boldsymbol{r},t),\psi^*(\boldsymbol{r}',t)]_+ = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\\&[\psi^*(\boldsymbol{r},t),\psi^*(\boldsymbol{r}',t)]_+ = [\psi(\boldsymbol{r},t),\psi(\boldsymbol{r}',t)]_+ = 0.\end{aligned} \tag{2.30}$$

上述二次量子化的描述方式，在费米统计的情况下，也可用与由(2.14)式到(2.20)式相同的推导，证明是和通常的非相对论量子力学的描述方式等价的. 和玻

色统计的情形一样，证明必须以下述先决条件为根据，即波振动的能量子正是薛定谔方程所描写的粒子. 我们将把这个具体证明留给读者自己去做.

在第一章中介绍电磁辐射的量子理论时，我们曾经看到，电磁场的微观运动的量子化条件是和非相对论粒子微观运动的量子化条件完全相同的. 本节所讨论的二次量子化的描述方式对于这个情况提供了一个满意的解释，因为量子化条件代表由经典波动理论过渡到量子理论，或由经典粒子理论过渡到量子理论时，必须建立的属于波动性的观察量和属于粒子性的观察量之间的同一个联系. 但是，当服从费米统计的粒子由经典场理论过渡到量子理论时，量子化条件是由反对易关系给出，而由经典粒子理论过渡到量子理论则由通常的对易关系给出. 这种复杂的情况实际上反映这种情况：对于费米场，经典波动的极限是不存在的[①]. 因此不应把本节对服从费米统计的场进行量子化的过程简单地理解为由经典波动极限过渡到量子理论的过程，而应理解为在纯粹描述场的波动性的波动方程之上再加上表达粒子性的反对易关系而给出量子理论的过程.

在结束本节以前，我们将给出按照二次量子化观点对表 I 的修正. 新的对比由表 II 给出，从表 II 我们看到各种物质形式所表现的波动性和粒子性，在二次量子化的描述里得到进一步的统一. 这种统一的描述将是相对论量子力学的出发点. 值得指出的是，二次量子化概念的提出，只是为了解决在对实物和场的认识上存在的一些理论性问题，但它却为相对论量子理论或量子场论指出了发展的方向. 这说明理论的能动性在科学发展上的重要作用.

表 II

场(电磁辐射)	实物(自由的费米和玻色粒子)
经典电磁场的麦克斯韦方程 $\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A=0,\quad \nabla\cdot A=0$	薛定谔方程 $i\frac{\partial}{\partial t}\psi=-\frac{1}{\lambda}\nabla^2\psi$
简谐振动的动量和坐标 $P_{ks}(t), Q_{ks}(t)\quad (s=1,2)$	简谐振动的动量和坐标 $P_k(t), Q_k(t)$
量子理论的对易关系	量子理论的对易关系或反对易关系
容器的薛定谔方程能级 $E_{ks}=\left(n_{ks}+\frac{1}{2}\right)h\nu_k$ 能量子＝光子	容器的薛定谔方程能级 $E_n=nh^2k^2/2m$ （对于费米粒子 $n\leqslant 1$） 能量子＝粒子

① 关于这一点，我们将在后面更详细地加以阐明.

§3 物质场的量子理论

在上节的开始，我们曾经提到把非相对论量子力学推广到相对论领域所遇到的严重困难，并且指出为了克服这些困难，必须改变量子力学里一些重要的概念. 在上节的第二部分，我们介绍了非相对论量子力学的二次量子化描述方式. 这个描述方式虽然在内容上没有超出旧有的量子力学的范围，但在概念上却有着重要的发展. 在以下几节中我们将指出，如果把相对论的克莱因-戈尔登方程和狄拉克方程都看作是相当于经典场的方程而按照上节所述的二次量子化的方式进行量子化，那么这些方程所存在的负能困难和负几率困难都可得到避免.

我们曾在前面指出，在非相对论的领域内，二次量子化的描述是和通常薛定谔量子理论完全等价的. 但在相对论的领域内，情形就完全不同. 把狄拉克方程和克莱因-戈尔登方程看成经典波动方程然后按二次量子化方式进行量子化所得的理论，将和把这些方程看成相对论薛定谔方程所得出的理论完全不同. 因为在后一理论里的负能困难和负几率困难在新理论里已不复存在. 这样得到的新理论称为量子场论，它是基本粒子理论的出发点.

在量子场论完整地建立起来以前，实验上已发现了电子对的产生和 β 衰变的现象. 在这些现象里，电子也像光子一样地被放出或被吸收，这就提供了把电子场按照电磁场的方式进行量子化的实际要求. 考虑到电子所满足的费米统计规律和二次量子化的非相对理论所提供的线索，一个电子场的量子理论就很容易地建立起来.

除电子外，所有自旋为 1/2 的基本粒子的场，如质子、中子、中微子、近年来所发现的各种超子以及 μ 介子，都由狄拉克方程描写. 这些粒子都满足费米统计规律. 在加速器里产生的 π 介子和 K 介子，都是自旋为零、服从玻色统计规律的粒子. 这两种粒子的场都由克莱因-戈尔登方程描写. 光子是迄今已发现的唯一的自旋为 1 的基本粒子. 光子场(即自由电磁场)是由麦克斯韦波动方程描写的. 现在还没有发现自旋大于 1 的基本粒子，所以上面提到的狄拉克方程、克莱因-戈尔登方程和麦克斯韦方程已经足够描写现在已发现的所有基本粒子的场.

量子场论主要的成就是：它解释了各种基本粒子的放出和吸收现象，从而正确地描述了物质的不同形式间的相互转换和相互作用的规律；它导出了物质的粒子性和电荷的量子性；它避免了狄拉克理论里的负能困难和克莱因-戈尔登理论里的负几率困难；它正确地反映出物质在微观运动领域内所反映出来的波动和粒子两种属性以及量子现象和经典极限间的联系；它表达出微观运动和统计规律之间密切的关系；这样，它就把 19 世纪中人们认识上的实物和场的对立转变为两种统

计规律的对立. 在宏观领域里,电磁波作为场的形式和电子作为实物的形式而存在主要是由于它们服从两种不同的统计规律所造成的.

量子场论的建立使得人们对于物质世界的认识前进了一大步,但是客观世界的无穷尽性和认识发展的阶段性这些普遍真理在这里又一次得到验证,这表现于在理论的计算里出现了发散困难. 这些困难不仅反映出现有理论的缺陷,而且指出了克服这个缺陷的方向. 我们知道这些发散结果都是由于在极高能量时各种粒子间的相互作用所造成的,而基本粒子本身的结构,对于高能的相互作用是极重要的决定因素. 在现有的理论里,为着处理的方便,人们都把相互作用的粒子看成没有内部结构的几何上的点,这是产生发散困难的主要原因. 所以为着消除发散困难,必须对基本粒子的内部结构进行观察,从而建立起基本粒子内部结构的理论. 这个情况和原子核理论的发展过程是很相像的. 在中子被发现以前,人们对于原子核的概念只是一个带正电的质点,但在中子被发现以后,实验进一步观察了原子核的内部结构,并且发展起原子核的理论. 这使得我们的认识向微观世界前进了一步. 现在为了消除上述的发散困难,显然必须对微观世界的基本粒子的内部结构进行实验的和理论的工作.

按照量子场论,电荷和质量都具有粒子性,但理论不能够解释为什么所有带电粒子的电荷的绝对值都是相同的,而不同粒子的质量则是大小不等. 人们有理由希望,在消除了发散困难的将来的新理论里,这类问题也能够获得解答.

像前面所处理的电磁辐射和非相对论薛定谔理论的二次量子化描述方式里的情形一样,描写自由物质场的微观运动的薛定谔方程可写为

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = H\Psi(t), \tag{3.1}$$

$$H = \sum_k \hbar\epsilon_k a_k^* a_k. \tag{3.2}$$

ϵ_k 代表相对论的粒子的能量. 当系统具有确定的总能量时,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = E\Psi(t), \tag{3.3}$$

于是(3.1)可写为

$$E\Psi(t) = H\Psi(t). \tag{3.4}$$

我们在上面所用的是薛定谔表象. 在这个表象里 Ψ 是 t 的函数,a_k^* 和 a_k 都与时间无关. 我们可以利用下面变换过渡到海森伯表象:

$$\Psi(t) = e^{-iHt/\hbar}\Psi_H, \tag{3.5}$$

代入(3.1)得

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_H = 0, \tag{3.6}$$

即在海森伯表象中的态矢量与时间无关. 但很容易得出,在这个表象中 a_k^* 和 a_k 为

$$
\begin{aligned}
a_{kH}^*(t) &= e^{iHt/\hbar} a_k^* e^{-iHt/\hbar}, \\
a_{kH}(t) &= e^{iHt/\hbar} a_k e^{-iHt/\hbar}.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

利用 a_k 和 a_k^* 的对易关系得

$$
\begin{aligned}
a_{kH}^*(t) &= a_k^* e^{i\varepsilon_k t}, \\
a_{kH}(t) &= a_k e^{-i\varepsilon_k t}.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

所以在非相对论薛定谔理论里的关于表象和绘景的概念，在量子场论里完全适用，这是因为场论里的态矢量 Ψ 正是薛定谔理论里简谐振子波函数的乘积. 在下面两章中，我们将看到，物质场中除有粒子存在外，还可有反粒子存在，这时(3.2)应换为

$$
H = \sum_k \hbar\varepsilon_k a_k^* a_k + \sum_k \hbar\varepsilon_k b_k^* b_k, \tag{3.9}
$$

b_k^* 和 b_k 代表反粒子的放出和吸收算符. 在(3.7)和(3.8)式中把 a_k 换为 b_k 所得的式子同样成立.

第二章　自由场的经典理论和量子理论

§4　介子场的经典理论

介子场有 π 介子场和 K 介子场两种. 它们满足下面克莱因-戈尔登方程：

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - \mu^2\varphi = 0, \tag{4.1}$$

式中 c 代表光速，μ 是一个常数，它的量纲为长度的倒数. 对于 π 介子场和 K 介子场，μ 的值是不同的. 带电介子场由复数的 φ 描写，中性的介子场则由实数的 φ 描写. 下面我们将首先考虑 φ 为复数时的情况，引入 $x_4 = \mathrm{i}ct$，上式可写为

$$\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varphi - \mu^2\varphi = 0. \tag{4.2}$$

在洛伦兹变换下，φ 是一个不变量. 我们可以证明(4.2)的形式在洛伦兹变换下是不变的. 引入洛伦兹变换

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu}x_\nu, \quad \sum_{\nu} a_{\mu\nu}a_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\lambda}. \tag{4.3}$$

由于 φ 是一个不变量，

$$\varphi(x_\mu) = \varphi'(x'_\mu), \tag{4.4}$$

把(4.3)和(4.4)代入(4.2)，我们立刻得到

$$\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x'_\mu}\frac{\partial}{\partial x'_\mu}\varphi' - \mu^2\varphi' = 0.$$

为了对由(4.1)或(4.2)所描写的介子场的物理性质进行讨论，我们必须找出属于这个场的物理观察量，如能量、动量、角动量、电流密度等. 任何物理观察量都必须满足下面两个条件：(i) 它必须是洛伦兹变换下的协变量，或协变量密度，换句话说，它必须是一个四维标量或标量密度，矢量或矢量密度，张量或张量密度等. 比如能量和动量构成一个四维矢量，能量动量张力张量密度则构成一个四维张量密度，电荷和电流密度构成一个四维矢量密度等. (ii) 它必须满足守恒定律. 因为只有通过守恒定律，人们才能够认识和测量任何一个物理观察量. 如果对于满足(4.2)式的场，我们能由 φ 和 $\varphi_\mu\left(=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varphi\right)$ 构成一个满足下列守恒条件的矢量密度 j_μ：

$$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu = 0, \tag{4.5}$$

那么可以肯定地说,这个 j_μ 必定是这个场的四维电流密度,因为不可能有别的守恒的矢量密度. 再者,如果我们能够由 φ 和 φ_μ 构成一个满足守恒定律的四维张量密度 $T_{\mu\nu}$:

$$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_\mu} T_{\nu\mu} = 0, \tag{4.6}$$

那么 $T_{\nu\mu}$ 必定是这个场的能量动量张力张量密度. 很容易看出,满足(4.5)和(4.6)两式的 j_μ 和 $T_{\nu\mu}$ 分别可写为

$$j_\mu = \mathrm{i}\varepsilon c \left\{ \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu} \varphi - \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right\}, \tag{4.7}$$

$$T_{\mu\nu} = - \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} + \delta_{\mu\nu} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{4} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda} + \mu^2 \varphi^* \varphi \right\}. \tag{4.8}$$

由(4.8)给出的 $T_{\mu\nu}$ 对指标 μ,ν 是对称的. (4.7)式中的 ε 是一个代表电荷的常数. 能量和动量密度分别为

$$\begin{aligned} p_0 &= T_{44} = - \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_4} \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} + \nabla \varphi^* \cdot \nabla \varphi + \mu^2 \varphi^* \varphi, \\ p_i &= \frac{\mathrm{i}}{c} T_{i4} = \frac{-\mathrm{i}}{c} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} - \frac{\mathrm{i}}{c} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_4} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \quad (i = 1,2,3) \end{aligned} \tag{4.9}$$

取(4.7)和(4.9)两式对空间的积分,得

$$J_\mu = \mathrm{i}\varepsilon c \int \left\{ \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu} \varphi - \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right\} \mathrm{d}V, \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} E &= \int T_{44} \mathrm{d}V = \int \left\{ - \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_4} \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} + \nabla \varphi^* \cdot \nabla \varphi + \mu^2 \varphi^* \varphi \right\} \mathrm{d}V \\ &= \int \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \varphi^* \cdot \nabla \varphi + \mu^2 \varphi^* \varphi \right\} \mathrm{d}V, \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$P_i = - \int \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\} \mathrm{d}V. \tag{4.12}$$

我们注意到,除掉一个常数因子以外,(4.10),(4.11)和(4.12)三式正是当我们把 $\varphi(\boldsymbol{r},t)$ 看成是薛定谔理论里的几率幅时,所得的四维电流矢量、能量和动量的平均值. 这个常数因子正是普朗克常数 $\hbar$. 由于在本节直到现在为止我们所讨论的对象是经典的场,所以在所有的式子里都不会出现 $\hbar$. 在以后将要讨论的各种经典场的理论里,我们都将发现同样的情况,即经典场的各种由体积积分表出的物理量,正是当我们把场变量(如 φ,ψ 等)看作是薛定谔理论里的几率幅时所得的相应物理量的平均值.

下面我们将顺便地讨论一下,把(4.1)式中的波函数 φ 看成薛定谔理论里的几

率幅时所遇到的负几率困难. 按照几率解释,(4.10)式代表单个介子的几率流,因此由(4.7)式给出的 j_μ 也应解释为四维几率流密度,其中 $\rho=-\mathrm{i}j_4/c$ 应为几率密度. 它的式子可写为

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\mathrm{i}\varepsilon}{c}\left\{\varphi(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial}{\partial t}\varphi^*(\boldsymbol{r},t)-\varphi^*(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\boldsymbol{r},t)\right\}. \tag{4.13}$$

在几率的解释里,上式右边的常数 ε/c 应代表归一化因子,它必须这样选取,使得由上式对整个空间积分所给出的总几率等于 1. $\rho(\boldsymbol{r},t)$ 的物理解释是在 $\boldsymbol{r}$ 点的单位体积内观察到这个粒子的几率. 作为几率密度,$\rho(\boldsymbol{r},t)$ 必须永远取正值,但从下面考虑很容易看出 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ 不可能这样. 我们注意到当 $\varphi(\boldsymbol{r},t)$ 是(4.1)的解时, $\varphi^*(\boldsymbol{r},t)$ 也是解. 但是当我们在(4.13)式中把 $\varphi(\boldsymbol{r},t)$ 换成 $\varphi^*(\boldsymbol{r},t)$ 时,$\rho(\boldsymbol{r},t)$ 即变号. 这说明使得(4.13)取负值的解总是存在的. 这就是把克莱因-戈尔登波函数 φ 解释为几率幅时所遇到的负几率困难.

当我们把 φ 看作经典场时,按照前面的讨论,$\rho(\boldsymbol{r},t)$ 代表在 $\boldsymbol{r}$ 点的电荷密度,这时不同符号的 ρ 值只代表不同符号的电荷密度,这将不会导致任何困难. 从上一节的讨论,我们看到 φ 和 φ^* 应代表电荷相反的解. 一般称 φ^* 为 φ 的电荷共轭.

因为由(4.1)所描写的场是自由场,所以由(4.11)和(4.12)给出的能量 E 和动量 P_i 必须是常数. 这一点可由(4.6)证明. 对(4.6)取整个空间的积分,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_4}\int T_{\mu4}\mathrm{d}V+\sum_{i=1}^{3}\int\frac{\partial}{\partial x_i}T_{\mu i}\mathrm{d}V=0.$$

应用高斯(Gauss)定理,上式第二项可以变为体积边界上的面积分. 这个边界可以是 §1 中所讨论的容器壁. 由于在对立的容器壁面上,这个面积分的被积函数相同但法线方向相反,因此面积分为零. 我们也可取积分区域为整个空间,并且要求在无穷远处的 φ 等于零,因此 $T_{\mu\nu}$ 在空间的无穷远处的值为零. 于是上述无穷远边界上的面积分也为零. 我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_4}\int T_{\mu4}\mathrm{d}V=0. \tag{4.14}$$

由关系(4.11)和(4.12),我们立刻得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E=0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_i=0. \tag{4.15}$$

上式分别代表自由场的能量守恒和动量守恒定律.

由(4.9)式所给出的能量和动量密度,我们得出场对坐标原点($x_1=x_2=x_3=0$)的角动量为

$$\begin{aligned}M_{ij}&=\int(x_ip_j-x_jp_i)\mathrm{d}V\\&=\frac{\mathrm{i}}{c}\int(x_iT_{j4}-x_jT_{i4})\mathrm{d}V.\end{aligned} \tag{4.16}$$

对于自由场上式应满足角动量守恒定律：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_{ij}=0. \tag{4.17}$$

为证明上式，我们引入

$$m_{\mu\nu\rho}=x_\mu T_{\nu\rho}-x_\nu T_{\mu\rho},$$

由(4.6)得

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho}m_{\mu\nu\rho}=\frac{\partial}{\partial x_\rho}(x_\mu T_{\nu\rho}-x_\nu T_{\mu\rho})=T_{\nu\mu}-T_{\mu\nu}.$$

前面已经指出 $T_{\mu\nu}$ 对 μ,ν 是对称的，即 $T_{\nu\mu}=T_{\mu\nu}$，代入上式得

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho}m_{\mu\nu\rho}=0. \tag{4.17a}$$

对上式取整个空间的积分，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_4}\int m_{\mu\nu4}\mathrm{d}V+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}m_{\mu\nu i}\mathrm{d}V=0.$$

上式第二项可以利用高斯定理变成无穷远处的面积分，应用与前面相同的考虑，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_4}\int m_{\mu\nu4}\mathrm{d}V=0\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_4}M_{\mu\nu}=0. \tag{4.17b}$$

因在无穷远的面积分等于零。在上面结果中取 $\mu=i,\nu=j$，立刻得出(4.17)式。

下面我们将考虑 φ 是实数时的情况。由(4.7)我们立刻看到，当 φ 是实数时，$j_\mu=0$。这说明实数的 φ 代表不带电时的情况。在前面所给的 $T_{\mu\nu}$，p_0，p_i，E，P，和 M_{ij} 的表达式中代入 $\varphi^*=\varphi$，即给出相应于中性场的物理量。我们要注意，在这些表达式里物理量的单位并没有确定，所以我们可以在这些式子的右边乘以一个任意的常数。为着后面处理方便，对于中性介子场，我们将在所有由上述替代得出的物理量表达式的右边乘上一个因子 1/2.

如果对于带电介子场，我们引入代换

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1-\mathrm{i}\varphi_2), \tag{4.18}$$

φ_1 和 $\mathrm{i}\varphi_2$ 分别代表 φ 的实数和虚数部分，那么(4.1)式即可写为

$$\nabla^2\varphi_s-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi_s-\mu^2\varphi_s=0,\quad (s=1,2) \tag{4.19}$$

在上式中 φ_1 和 φ_2 都是实数.

把(4.18)代入(4.8)，(4.9)，(4.11)，(4.12)和(4.16)等式，分别给出：

$$T_{\mu\nu}=\sum_{s=1,2}\left[-\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_\nu}+\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\left\{\sum_\lambda\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_\lambda}\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_\lambda}+\mu^2\varphi_s^2\right\}\right], \tag{4.8a}$$

$$\left.\begin{aligned}p_0&=T_{44}=\frac{1}{2}\sum_{s=1,2}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi_s}{\partial t}\right)^2+(\nabla\varphi_s)^2+\mu^2\varphi_s^2\right],\\ p_i&=\frac{\mathrm{i}}{c}T_{i4}=-\sum_{s=1,2}\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_s}{\partial t},\end{aligned}\right\} \tag{4.9a}$$

$$E=\frac{1}{2}\sum_{s=1,2}\int\left\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi_s}{\partial t}\right)^2+(\nabla\varphi_s)^2+\mu^2\varphi_s^2\right\}dV, \tag{4.11a}$$

$$P_i=-\sum_{s=1,2}\int\frac{1}{c^2}\left\{\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_s}{\partial t}\right\}dV, \tag{4.12a}$$

$$M_{ij}=-\sum_{s=1,2}\int\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi_s}{\partial t}\left\{x_i\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_j}-x_j\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_i}\right\}dV; \tag{4.16a}$$

如果我们把描写中性场的实波函数 φ 写成 φ_3，那么在上式中 $s=3$ 的情况即代表中性场的相应量. 我们知道，π 介子有带正负电荷和不带电的三种，这三种介子的质量都非常接近，除电荷不同外，在其他方面的性质都几乎是相同的. 我们可以引用光谱学的术语称这三种介子为电荷的三重态. 在原子光谱里一组三重态代表总角动量为 1，沿着 z 方向的角动量为 $+1,0,-1$ 的三个态. 现在一般都用一个三维的"同位旋"空间来描述基本粒子的电荷自由度. 我们可以把三种 π 介子的波函数看成同位旋空间的一个矢量，它沿着坐标轴的三个分量 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 由前面所述三种实的克莱因-戈尔登波函数表示. 很容易看出，下面的波函数

$$\varphi^+=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1+i\varphi_2),$$

$$\varphi_0=\varphi_3,$$

$$\varphi^-=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1-i\varphi_2),$$

分别代表同位旋空间的角动量三重态，其总角动量为 1. 所以人们通常称 π 介子为同位旋角动量为 1 的基本粒子.

对于 K 介子，情形完全不一样. 人们发现，除了带正负电的两种介子以外，有两种中性的 K 介子，并且带正电和带负电的两种 K 介子的性质很不相同，但这四种粒子的质量也是非常相近的. 现在一般认为带正电的 K 介子和一种中性 K 介子构成一组二重态. 这个中性 K 介子也像带电 K 介子一样由一个复数的波函数来描写. 电荷二重态相当于同位旋空间角动量为 1/2 的态，它可由下面二分量波函数来描写：

$$\chi=\begin{bmatrix}\varphi_{K^+}\\ \varphi_{K^0}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\varphi_1-i\varphi_2\\ \varphi_3-i\varphi_4\end{bmatrix},$$

式中 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4$ 都是满足(4.1)的实波函数. 上式的复数共轭代表带负电的 K 介子和另一种中性的 K 介子：

$$\chi^*=\begin{bmatrix}\varphi_{K^-}\\ \varphi_{\bar{K}^0}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\varphi_1+i\varphi_2\\ \varphi_3+i\varphi_4\end{bmatrix},$$

即这四个 K 介子可以由四个实的波函数 $\varphi_s(s=1,2,3,4)$ 来描写. 因此 K 介子场的 $T_{\mu\nu},p_0,p_i,E,P_i$ 和 M_{ij} 等量也可由(4.8a)—(4.16a)给出，其中对 s 的相加应由

$s=1$ 加到 $s=4$.

§5 介子场的量子理论

上节的讨论指出,带电的和中性的各种介子场,都可用一个或数个实波函数 φ_s 来描写.由于介子服从玻色统计,我们可以用第一章处理电磁辐射同样的方式得出介子场的量子理论.为简单起见,我们可以让 §1 所引入容器的体积趋于无穷大,这样容器里的空间就可看成整个空间.而相应于(1.4)的傅里叶级数就变成傅里叶积分.于是 φ_s 的展开式可写为

$$\varphi_s = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3\boldsymbol{k}\{a_s(\boldsymbol{k},t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + a_s^*(\boldsymbol{k},t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\}. \tag{5.1}$$

代入波动方程(4.1)立刻给出 $a_s(\boldsymbol{k},t)$ 所满足的运动方程为:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{dt^2}a_s(\boldsymbol{k},t) + \omega(\boldsymbol{k})^2 a_s(\boldsymbol{k},t) = 0,\\ &\omega(\boldsymbol{k})^2 = c^2(k^2+\mu^2).\end{aligned} \tag{5.2}$$

这说明波动 φ_s 可用无穷多个简谐振动来代替.我们可以选取(5.2)的解为:

$$a_s(\boldsymbol{k},t) = a_s(\boldsymbol{k})e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t}, \tag{5.3}$$

很容易看出这个选择并没有影响解(5.1)的普遍性.把(5.1)和(5.3)代入(4.11a),我们得总能量的式子为

$$E_s = \int d^3\boldsymbol{k}\,\frac{2\omega(\boldsymbol{k})^2}{c^2}a_s^*(\boldsymbol{k})a_s(\boldsymbol{k}). \tag{5.4}$$

引入相应于(1.10)式的变换

$$\begin{aligned}a_s(\boldsymbol{k}) &= \frac{ic}{2\omega(\boldsymbol{k})}[P_s(\boldsymbol{k}) - i\omega(\boldsymbol{k})Q_s(\boldsymbol{k})],\\ a_s^*(\boldsymbol{k}) &= \frac{-ic}{2\omega(\boldsymbol{k})}[P_s(\boldsymbol{k}) + i\omega(\boldsymbol{k})Q_s(\boldsymbol{k})].\end{aligned} \tag{5.5}$$

于是(5.4)可写为

$$H_s = \frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{k}[P_s(\boldsymbol{k})^2 + \omega(\boldsymbol{k})^2 Q_s(\boldsymbol{k})^2]. \tag{5.6}$$

在上式中我们曾把 E_s 换写成 H_s,因为如果把 $P_s(\boldsymbol{k})$ 和 $Q_s(\boldsymbol{k})$ 看成振动 $\boldsymbol{k}$ 的正则动量和正则坐标,上式正是介子场 s 的总哈密顿量.从下面事实可以看出 $P_s(\boldsymbol{k})$ 和 $Q_s(\boldsymbol{k})$ 的确是振动的正则动量和正则坐标:由(5.6)给出的正则运动方程正是(5.2)式.

当介子场所占据的空间只是 §1 所引入的容器以内的空间时,(5.6)应换为

$$H_s = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}[P_{ks}^2 + \omega_k^2 Q_{ks}^2]. \tag{5.7}$$

(5.6)式可看作是(5.7)在容器体积趋于无穷大时的极限. 对于(5.7),量子化条件为

$$\begin{aligned}[][P_{ks},Q_{k's}] &= -\mathrm{i}\,\hbar\delta_{kk'},\\ [P_{ks},P_{k's}] &= [Q_{ks},Q_{k's}] = 0.\end{aligned} \tag{5.8}$$

当容器体积趋于无穷大时上式变为

$$\begin{aligned}[][P_s(\boldsymbol{k}),Q_s(\boldsymbol{k}')] &= -\mathrm{i}\,\hbar\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'),\\ [P_s(\boldsymbol{k}),P_s(\boldsymbol{k}')] &= [Q_s(\boldsymbol{k}),Q_s(\boldsymbol{k}')] = 0.\end{aligned} \tag{5.9}$$

引入 $a_s(\boldsymbol{k}) = \alpha_s(\boldsymbol{k})\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k})/\hbar c^2}$,并利用(5.5),上面关系可表为

$$\begin{aligned}[][a_s(\boldsymbol{k}),a_s^*(\boldsymbol{k}')] &= \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'),\\ [a_s(\boldsymbol{k}),a_s(\boldsymbol{k}')] &= [a_s^*(\boldsymbol{k}),a_s^*(\boldsymbol{k}')] = 0.\end{aligned} \tag{5.10}$$

应用第一章的讨论,我们看到 $a_s(\boldsymbol{k})$代表减少一个粒子的算符,$a_s^*(\boldsymbol{k})$代表增加一个粒子的算符,$a_s^*(\boldsymbol{k})a_s(\boldsymbol{k})$代表相应于前进矢量 $\boldsymbol{k}$ 的粒子数算符 $n_s(\boldsymbol{k})$. 于是(5.4)可写为

$$\begin{aligned}H_s &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\hbar\omega(\boldsymbol{k})a_s^*(\boldsymbol{k})a_s(\boldsymbol{k})\\ &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\hbar\sqrt{c^2(\boldsymbol{k}^2+\mu^2)}\,a_s^*(\boldsymbol{k})a_s(\boldsymbol{k}).\end{aligned} \tag{5.11}$$

把(5.1)和(5.3)代入(4.12a),我们同样得到总动量的式子为

$$\begin{aligned}P_s &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\frac{2}{c^2}\omega(\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}\alpha_s^*(\boldsymbol{k})\alpha_s(\boldsymbol{k})\\ &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\hbar\boldsymbol{k}a_s^*(\boldsymbol{k})a_s(\boldsymbol{k}).\end{aligned} \tag{5.12}$$

如果只有振动 $\boldsymbol{k}$ 激发到一个量子的态,其余的振子都处于基态. 描写空间的薛定谔波函数可写为

$$\Psi = a_s^*(\boldsymbol{k})\Psi_0. \tag{5.13}$$

Ψ_0 为真空态的波函数. 利用对易关系(5.10),我们立刻得到这个态的总能量和总动量由下式的本征值给出:

$$\begin{aligned}H_s\Psi &= \hbar\sqrt{c^2(\boldsymbol{k}^2+\mu^2)}\,\Psi,\\ P_s\Psi &= \hbar\boldsymbol{k}\Psi.\end{aligned} \tag{5.14}$$

这是一个动量为 $\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}$、能量为 $E=c\sqrt{\boldsymbol{p}^2+\hbar^2\mu^2}$的态. 但按照第一章的结论,这必须是一个动量为 $\boldsymbol{p}$ 和能量为 E 的单个"粒子"的态. 从能量和动量间的关系,我们导出这个粒子的静止质量为

$$m = \frac{\hbar\mu}{c}. \tag{5.15}$$

上式给出在介子场波动方程里出现的 μ 和在量子化以后出现的粒子的质量 m 间

的关系.上面结果指出不管粒子的能量和动量是多少,而且不管粒子的数目是多少,这些粒子的静止质量都是一样的.这是一个很重要的结果,因为这是第一次人们从理论"导出"实物的静止质量的粒子性.我们还注意到,由经典场过渡到量子场所引入的联系波动性和粒子性的关系:

$$\boldsymbol{p} = \hbar \boldsymbol{k}, \quad E = c\hbar\sqrt{k^2+\mu^2} = \hbar\omega(\boldsymbol{k}), \tag{5.16}$$

正是由经典粒子过渡到量子理论时所引入的德布罗意关系.

过渡到量子理论以后,(5.1)可写为

$$\varphi_s(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3\boldsymbol{k}\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega(\boldsymbol{k})}}\{a_s(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + a_s^*(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\}. \tag{5.17}$$

在薛定谔表象里 $a_s(\boldsymbol{k})$ 和 $a_s^*(\boldsymbol{k})$ 都是与时间 t 无关的算符.在海森伯表象里与时间有关的相应算符 $a_s(\boldsymbol{k},t)$ 和 $a_s^*(\boldsymbol{k},t)$ 由下式给出

$$\begin{aligned} a_s(\boldsymbol{k},t) &= e^{iH_s t/\hbar}a_s(\boldsymbol{k})e^{-iH_s t/\hbar}, \\ a_s^*(\boldsymbol{k},t) &= e^{iH_s t/\hbar}a_s^*(\boldsymbol{k})e^{-iH_s t/\hbar}, \end{aligned} \tag{5.18}$$

式中 H_s 由(5.11)给出.利用对易关系(5.10),我们由上式得

$$\begin{aligned} a_s(\boldsymbol{k},t) &= a_s(\boldsymbol{k})e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t}, \\ a_s^*(\boldsymbol{k},t) &= a_s^*(\boldsymbol{k})e^{i\omega(\boldsymbol{k})t}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

于是在海森伯表象中(5.17)式变为

$$\varphi_s(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3\boldsymbol{k}\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2k_0}}\{a_s(\boldsymbol{k})e^{i(kx)} + a_s^*(\boldsymbol{k})e^{-i(kx)}\}, \tag{5.20}$$

式中

$$(kx) \equiv \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - k_0 t, \quad k_0 \equiv \omega(\boldsymbol{k}). \tag{5.21}$$

$k_\mu = (\boldsymbol{k}, ik_0/c)$ 和 $x_\mu = (\boldsymbol{r}, ict)$ 是两个四维矢量.很容易看出(5.20)是波动方程(4.2)的解.

由(5.20)及对易关系(5.10),我们立刻得到

$$[\varphi_s(x), \varphi_s(x')] = -i\hbar c^2\Delta(x-x'), \tag{5.22}$$

其中

$$\Delta(x-x') = \frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{k}\frac{1}{2k_0}\{e^{i(k,x-x')} - e^{-i(k,x-x')}\}. \tag{5.23}$$

当 $t=t'$ 时,

$$\Delta(x-x')\big|_{t=t'} = \frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{k}\frac{1}{2k_0}\{e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} - e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\}.$$

很容易看出上面积分等于零,因括号中第一项在 $\boldsymbol{k}$ 换成 $-\boldsymbol{k}$ 时变成第二项,而积分不应因 $\boldsymbol{k}$ 换成 $-\boldsymbol{k}$ 而有所改变,所以括号中的两项对积分的贡献互相抵消,我们得

$$\Delta(x-x')\big|_{t=t'} = 0. \tag{5.24}$$

于是由(5.22)得

$$[\varphi_s(\boldsymbol{r}),\varphi_s(\boldsymbol{r}')] = 0, \tag{5.25}$$

式中 $\varphi_s(\boldsymbol{r})$是由(5.17)式给出的薛定谔算符(即薛定谔表象中的算符).

以上所讨论的是中性介子场的量子理论. 对于带电介子场,我们可命

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x) - \mathrm{i}\varphi_2(x)), \tag{5.26}$$

式中 $\varphi_1(x)$和 $\varphi_2(x)$由(5.20)式给出. 我们得

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \mathrm{d}^3k\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2k_0}}\{a(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)} + b^*(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx)}\}, \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[a_1(\boldsymbol{k}) - \mathrm{i}a_2(\boldsymbol{k})], \\ b(\boldsymbol{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[a_1(\boldsymbol{k}) + \mathrm{i}a_2(\boldsymbol{k})]. \end{aligned} \tag{5.28}$$

由对易关系(5.10)得 $a(\boldsymbol{k}),b(\boldsymbol{k})$间的对易关系为:

$$\begin{aligned} [a(\boldsymbol{k}),a^*(\boldsymbol{k}')] &= \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'), \\ [b(\boldsymbol{k}),b^*(\boldsymbol{k}')] &= \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'), \end{aligned} \tag{5.29}$$

其余的对易括号=0.

上述"其余的对易括号"包括$[a(\boldsymbol{k}),a(\boldsymbol{k}')]$,$[a(\boldsymbol{k}),b^*(\boldsymbol{k}')]$,等等. 上面对易关系表示有两种粒子,它们的放出(增加)和吸收(减少)粒子的算符分别为 $a^*(\boldsymbol{k}),a(\boldsymbol{k})$和 $b^*(\boldsymbol{k}),b(\boldsymbol{k})$. 下面的计算将指出这两种粒子带相反符号的电荷.

由(4.13)式得介子场的总电荷为

$$Q = \int\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V = -\frac{\mathrm{i}\varepsilon}{c}\int\left\{\varphi\frac{\partial}{\partial t}\varphi^* - \varphi^*\frac{\partial}{\partial t}\varphi\right\}\mathrm{d}V. \tag{5.30}$$

代入(5.27),经过简单的计算得

$$Q = \hbar\varepsilon c\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}[a^*(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) - b^*(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k})]. \tag{5.31}$$

上式说明这两种粒子带有相反符号的电荷. 即: $n^{(+)}(\boldsymbol{k}) = a^*(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})$为带电$\hbar\varepsilon c$ 的粒子数,$n^{(-)}(\boldsymbol{k}) = b^*(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k})$为带电 $-\hbar\varepsilon c$ 的粒子数. 实验上我们观察到介子的电荷和电子电荷绝对值相同,即为 $e=4.80\times10^{-10}$静电单位. 这个观察到的 e 和 ε 的关系为

$$\varepsilon = \frac{e}{\hbar c}. \tag{5.32}$$

上面结果说明这个系统的总电荷必须是 e 的整数倍. (5.32)也是一个联系着粒子性的物理量 e 和代表波动场的电磁性质的一个参数 ε 的关系. 这个关系也像类似的关系(5.15)和(5.16)一样包含着普朗克常数$\hbar$.

值得指出的是在客观世界里电荷的粒子性比起质量的粒子性可能反映着一个更深刻的规律性，因为对于所有的物质场，电荷的量子都是相同的，而质量的量子则是各异的. 这个情况在现在的量子场论里是没有解释的. 我们所能够做的事，只是假定对于所有的带电场，ε 是一个普适的常数.

从本节的推导，我们注意到在量子理论里所有代表粒子性的物理量都包含一个因子$\hbar$. 这个因子的出现，一方面标志着单位的改变，另一方面也清楚地显示出量子化的效应. 当$\hbar$趋于零时，量子理论就重新回到经典的极限，因为这时所有的对易括号都等于零. 我们知道，$\hbar$是一个确定的常数，把它看成一个可变的量并使它趋于零是不允许的. 但是上边所述的经典极限可以这样来理解：当所有的态的粒子数都很大时，由(1.23)式给出的 a_k 和 a_k^*，由于它们是和粒子数 n_k 的平方根成正比的，也将变得很大，当我们把 a_k 和 a_k^* 代入对易关系(5.22)时，因为这式的右边的量比 n_k 小得多，所以可被忽略去，这样 a_k 和 a_k^* 就可看成互相对易而恢复到经典理论的情况. 在上面讨论里我们假定 $\boldsymbol{k}$ 是不连续的(即假定场是处于一个有限的容器以内). 但当我们让容器体积很大时，就可在 $\boldsymbol{k}$ 是连续的情况下（这时 $a_k=\sqrt{V/(2\pi)^3}a(\boldsymbol{k}), a_k^*=\sqrt{V/(2\pi)^3}a^*(\boldsymbol{k})$）得到同样的结论.

本节所讨论的介子场的量子理论的另一经典极限是经典粒子的极限. 在薛定谔理论里，当外场在一个波长的范围以内的变化可以略去时，量子力学即过渡到经典粒子的力学. 因为我们所讨论的是自由场，外场根本等于零，所以量子理论里的粒子就是经典理论的粒子. 为了过渡到经典理论我们只需要考虑由平面波叠加出来的波包，然后证明这个波包即代表经典力学里的质点就成了. 但是为着使这个波包可以比拟于一个质点，这个波包必须由能量很高的平面波组成. 再者，当我们提到一个自由粒子的经典极限时，还意味着当这个粒子进入一个外力的作用范围时，它还保持着经典粒子的性质. 为着满足这个条件，这个粒子必须具有相当高的能量，但是这个能量又不可以太高，不致使较小的外力就可以导致新粒子的产生. 所以量子的介子场的经典粒子的极限可以这样来理解：在忽略去粒子的产生和湮灭的近似下，一个纯粹由粒子或反粒子组成的波包可以由二次量子化表象过渡到薛定谔理论，然后在能量较高或外力较小的条件下过渡到经典粒子. 我们通常在乳胶里或气泡室里看到的介子轨迹即代表一个经典粒子的轨迹.

最后，我们将证明由(5.10)所给出的对易关系是与惯性坐标的选择无关的. 由于(5.10)和(5.22)是完全等价的，这等于证明条件(5.22)是与洛伦兹坐标的选择是无关的. 我们注意到(5.22)在洛伦兹变换下是不变的，所以只要证明(5.22)式右边的函数 $\Delta(x-x')$ 在洛伦兹变换下是一个不变量就行了. 很容易看出，(5.23)又可写成下面的形式：

$$\Delta(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^4 k\,\varepsilon(k)\delta(k_4^2+\boldsymbol{k}^2+\mu^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum\limits_{\mu=1}^{4}k_\mu(x_\mu-x'_\mu)}. \quad (\varepsilon(k) = -\mathrm{i}k_4/|k_4|)$$

因为 $\mathrm{d}^4 k=\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3\mathrm{d}k_0$,$\delta(k_4^2+\boldsymbol{k}^2+\mu^2)=\delta(k^2+\mu^2)$ 和 $\sum\limits_{\mu=1}^{4}k_\mu(x_\mu-x'_\mu)$ 在洛伦兹变换下都是不变量,这就证明了 $\Delta(x-x')$ 在洛伦兹变换下也是一个不变量. 因此在任一惯性坐标中,对易关系都由(5.22)或(5.10)式给出.

§6　狄拉克场的经典理论,代表平面波的解

狄拉克场是由四个分量的波函数 $\psi_\alpha(\alpha=1,2,3,4)$ 描写的. ψ_α 所满足的波动方程为

$$\Big(\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\mu\Big)\psi=0. \tag{6.1}$$

式中 μ 是一个常数,其量纲为长度的倒数;ψ 代表下面的"旋量"(四个矩阵元的列矩阵)

$$\psi=\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{bmatrix}; \tag{6.2}$$

γ_μ 是满足下面关系的四行四列的矩阵,

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu\nu}. \quad (\mu,\nu=1,2,3,4) \tag{6.3}$$

在(6.1)式的两边左乘以微分算符

$$\Big(\sum_{\nu=1}^{4}\gamma_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}-\mu\Big), \tag{6.3a}$$

并利用关系(6.3),我们立刻得到

$$\Big(\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\mu^2\Big)\psi=0. \tag{6.4}$$

由(6.2)得

$$\Big(\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\mu^2\Big)\psi_\alpha=0, \quad (\alpha=1,2,3,4) \tag{6.5}$$

即 ψ 的每一分量都是克莱因-戈尔登方程的解. (6.1)式实际上是 ψ_α 所满足的四个联立方程式,所以这四个 ψ_α 并不是互相独立的. 任意满足(6.5)式的四个 ψ_α 并不一定满足(6.1)式.

满足关系(6.3)的矩阵 γ_μ 可以有很多个表象. 通常所取的一种表象是

$$\gamma_1=\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\sigma_1\\ \mathrm{i}\sigma_1 & 0\end{bmatrix},\quad \gamma_2=\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\sigma_2\\ \mathrm{i}\sigma_2 & 0\end{bmatrix},$$
$$\gamma_3=\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\sigma_3\\ \mathrm{i}\sigma_3 & 0\end{bmatrix},\quad \gamma_4=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{bmatrix},\tag{6.6}$$

式中 $\sigma_i(i=1,2,3)$ 是通常的泡利(Pauli)矩阵：

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \sigma_2=\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{bmatrix},\quad \sigma_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\tag{6.7}$$

I 是二行二列的单位矩阵：

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.\tag{6.8}$$

把(6.7)和(6.8)代入(6.6)即得出四个四行四列的矩阵：

$$\gamma_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0\\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0\\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \gamma_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$
$$\gamma_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & -\mathrm{i} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \gamma_4=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

很容易验证它们满足对易关系(6.3)式.

取(6.1)式的复数共轭，然后再进行转置，我们得

$$\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu^*}\psi^{*\mathrm{T}}\gamma_\mu^{*\mathrm{T}}+\mu\psi^{*\mathrm{T}}=0,\tag{6.9}$$

因 $x_4=\mathrm{i}ct$，于是 $x_i^*=x_i(i=1,2,3)$，$x_4^*=-x_4$. 再由 γ_μ 的表象(6.6)得

$$\gamma_\mu^{*\mathrm{T}}=\gamma_\mu,\tag{6.10}$$

于是上面微分方程可写为

$$-\frac{\partial}{\partial x_4}\psi^{*\mathrm{T}}\gamma_4+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\psi^{*\mathrm{T}}\gamma_i+\mu\psi^{*\mathrm{T}}=0.$$

对上式从右边乘以 γ_4，利用 $\gamma_i\gamma_4=-\gamma_4\gamma_i$，并引入定义

$$\bar{\psi}=\psi^{*\mathrm{T}}\gamma_4,\tag{6.11}$$

我们立刻得到 $\bar{\psi}$ 所满足的方程为

$$\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\bar{\psi}\gamma_\mu-\mu\bar{\psi}=0.\tag{6.12}$$

下面我们将讨论(6.1)式的代表平面波的解. 命

$$\psi=\begin{bmatrix}\varphi\\ \chi\end{bmatrix},\quad \varphi=\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix},\quad \chi=\begin{bmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{bmatrix},\tag{6.13}$$

并代入(6.6)式,(6.1)式变为

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\varphi+\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\chi-\mu\varphi=0,\\ &\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\chi+\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\varphi+\mu\chi=0.\end{aligned}\tag{6.14}$$

上式中我们已经选取单位,使得 $c=1$. 当 ψ 代表平面波的解时,φ 和χ都含有因子 $e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}k_0t}$,上式变为

$$\begin{aligned}&k_0\varphi-(\boldsymbol{\sigma k})\chi-\mu\varphi=0,\\ &k_0\chi-(\boldsymbol{\sigma k})\varphi+\mu\chi=0.\end{aligned}\tag{6.15}$$

在上面联立方程式中消去函数χ,我们得

$$(\boldsymbol{k}^2-k_0^2+\mu^2)\varphi=0,\tag{6.16}$$

当 φ 不全等于零时,上式要求 $k_0^2=\boldsymbol{k}^2+\mu^2$,即

$$k_0=\pm\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2},\tag{6.17}$$

当 $k_0>0$ 时,由(6.15)的第二式得

$$\chi=\frac{(\boldsymbol{\sigma k})}{k_0+\mu}\varphi.\tag{6.18}$$

引入

$$\varphi=\varphi_s e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}k_0t},\quad(s=1,2)\tag{6.19}$$

式中 φ_s 由下式给出:

$$\varphi_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \varphi_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.\tag{6.20}$$

由(6.13)和(6.18)两式,我们得(6.1)式的平面波解为

$$\varphi=N_1\begin{bmatrix}\varphi_s\\ \dfrac{(\boldsymbol{\sigma k})}{k_0+\mu}\varphi_s\end{bmatrix}e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}k_0t},\quad(s=1,2)\tag{6.21}$$

上式代表狄拉克方程的两个独立的解. N_1 为归一化常数. 如果我们不用(6.18)式而用由(6.15)的第一式得出的

$$\varphi=\frac{(\boldsymbol{\sigma k})}{k_0-\mu}\chi,\tag{6.22}$$

并引入

$$\chi=\varphi_s e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}k_0t},\quad(s=1,2)\tag{6.23}$$

同样得出狄拉克方程的解为

$$\psi = N_2 \begin{bmatrix} \dfrac{(\boldsymbol{\sigma k})}{k_0 - \mu}\varphi_s \\ \varphi_s \end{bmatrix} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - ik_0 t}. \quad (s = 1,2) \tag{6.24}$$

N_2 为归一化常数. 很容易看出(6.21)和(6.24)并不是互相独立的. 如果在(6.24)中令 $N_2 = N_1(\boldsymbol{\sigma k})/(k_0+\mu)$, 并利用关系 $\boldsymbol{k}^2 = k_0^2 - \mu^2$, 即可看出(6.24)和(6.21)完全相同.

当 $k_0<0$ 时, (6.24)可写为

$$\psi = N_2 \begin{bmatrix} -\dfrac{(\boldsymbol{\sigma k})}{|k_0| + \mu}\varphi_s \\ \varphi_s \end{bmatrix} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + i|k_0|t}. \quad (s = 1,2) \tag{6.25}$$

(6.25)式是独立于(6.21)的解. 所以对于任一个 $\boldsymbol{k}$ 值, 狄拉克方程给出四个独立的解.

狄拉克方程最初是作为非相对论的薛定谔方程在相对论领域的推广提出来的. 因此它的解被解释为一个电子的几率幅. 这个方程圆满地解释了氢原子的精细结构. 但它具有能量为负值的解, 因此造成了严重的负能困难. 按照对狄拉克波函数的几率解释, 电子的能量应为算符 $i\hbar\partial/\partial t$ 作用于 ψ 所得的本征值. 由(6.25)式我们立刻得到

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\hbar|k_0|\psi = -\hbar\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}\,\psi. \tag{6.26}$$

这说明(6.25)相应于能量为负的态. 存在有负能态的一个直接的后果是, 由狄拉克电子和核子组成的氢原子将不可能有稳定的基态, 因为在电磁场与电子的相互作用下, 电子将从正能的基态跃迁到负能的态, 并且将一直跃向能量更负的态, 从而无休止地放射出电磁波. 为了避免这个困难, 狄拉克提出一个所谓"空穴理论". 按照这个理论, 所有负能级的态都已被电子占据. 由于电子满足费米统计规律, 在一般情况下, 处于正能态的电子将不可能跃到已被占据的负能级上去. 所以真空事实上是由所有负能级都被占满的所谓"负能电子海"所组成. 按照空穴理论, 这无穷多个负能电子的电荷, 惯性以及与电磁场的作用将不造成任何观察上的效应. 个别的负能电子可以吸收电磁辐射而跃到正能的态上去, 这个电子所遗下的未被占据的负能空穴即像负能电子海里的"气泡"一样表现为正电子. 这个过程在观察者看来即成为辐射转化为正负电子对的过程.

空穴理论虽然避免了负能困难, 并且预言了正电子的存在, 但它所假定的在真空中实际上存在着无穷多个负能电子的观点是很难被人们认真接受的. 现在我们知道, 狄拉克空穴理论所给出的计算结果是和量子场论所给出的结果完全相同的, 不过在量子场论里, 不需要在真空中引入任何负能电子. 我们将在下一节详细地介绍和讨论量子场论对狄拉克场的处理.

利用(6.20)式,并取 k_0 为永远为正的量,即

$$k_0 = + \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + \mu^2},$$

我们可把相应于前进矢量 $\boldsymbol{k}$ 的狄拉克方程的四个独立的解写为

$$\psi^{(+)} = N \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{k_z}{k_0 + \mu} \\ \dfrac{k_x + ik_y}{k_0 + \mu} \end{bmatrix} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - ik_0 t}, \quad \psi^{(+)} = N \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{k_x - ik_y}{k_0 + \mu} \\ -\dfrac{k_z}{k_0 + \mu} \end{bmatrix} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - ik_0 t}, \tag{6.21a}$$

$$\psi^{(-)} = N \begin{bmatrix} \dfrac{k_z}{k_0 + \mu} \\ \dfrac{k_x + ik_y}{k_0 + \mu} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + ik_0 t}, \quad \psi^{(-)} = N \begin{bmatrix} \dfrac{k_x - ik_y}{k_0 + \mu} \\ -\dfrac{k_z}{k_0 + \mu} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + ik_0 t}. \tag{6.25a}$$

因为 k_0 代表振动的频率,所以 $\psi^{(+)}$ 可称为正频率的解,$\psi^{(-)}$ 可称为负频率的解. 在得出上式时我们曾假定 σ_z 是对角的,即

$$\sigma_x = \sigma_1, \quad \sigma_y = \sigma_2, \quad \sigma_z = \sigma_3. \tag{6.27}$$

我们也可以把(6.21)和(6.25)两个解中的 φ_i 换成算符 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}$ 的本征函数 $\varphi_{+1/2}$ 和 $\varphi_{-1/2}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}(\boldsymbol{\sigma k})\varphi_{+1/2} &= + \varphi_{+1/2}, \\ \frac{1}{k}(\boldsymbol{\sigma k})\varphi_{-1/2} &= - \varphi_{-1/2}, \end{aligned} \tag{6.28}$$

$\varphi_{+1/2}$实际上是自旋方向平行于 $\boldsymbol{k}$ 的泡利二分量自旋波函数,$\varphi_{-1/2}$是自旋平行于 $-\boldsymbol{k}$ 的自旋波函数. 很容易得出(6.28)的解为(θ 和 φ 是 $\boldsymbol{k}$ 的球面方位角)

$$\varphi_{+1/2} = \begin{bmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} \end{bmatrix}, \quad \varphi_{-1/2} = \begin{bmatrix} -\sin\dfrac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} \end{bmatrix}. \tag{6.29}$$

于是狄拉克方程的四个独立解可写为

$$\begin{aligned} \psi_{\boldsymbol{k},s}^{(+)} &= N \begin{bmatrix} \varphi_s \\ \dfrac{(\boldsymbol{\sigma k})}{k_0 + \mu}\varphi_s \end{bmatrix} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - ik_0 t} = N \begin{bmatrix} \varphi_s \\ \dfrac{2s|\boldsymbol{k}|}{k_0 + \mu}\varphi_s \end{bmatrix} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - ik_0 t}, \\ \psi_{\boldsymbol{k},s}^{(-)} &= N \begin{bmatrix} \dfrac{-(\boldsymbol{\sigma k})}{k_0 + \mu}\varphi_s \\ \varphi_s \end{bmatrix} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + ik_0 t} = N \begin{bmatrix} \dfrac{-2s|\boldsymbol{k}|}{k_0 + \mu}\varphi_s \\ \varphi_s \end{bmatrix} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + ik_0 t}. \end{aligned} \tag{6.30}$$

在上式中 $s=\pm 1/2$ 分别代表自旋平行于 $\boldsymbol{k}$ 和 $-\boldsymbol{k}$ 的两个独立的解.

§7 狄拉克方程的协变性

下面我们将讨论狄拉克方程式(6.1)和狄拉克波函数 ψ 在洛伦兹变换下的协变性.

(6.1)式是在惯性坐标 x_μ 中写出的. 如果我们经过下面的洛伦兹变换

$$x'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu, \tag{7.1}$$

引入一个新的惯性坐标 x'_μ, 因为(6.1)式的成立应与惯性坐标的选择无关, 所以由(6.1)描写的场在新坐标中仍应由相同形式的方程来描写. 即在坐标 x'_μ 中, 这个场应服从的方程为

$$\left(\sum_{\mu=1}^{4} \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x'_\mu} + \mu\right)\psi'(x') = 0, \tag{7.2}$$

式中的矩阵 γ_μ 仍由(6.6)式给出. $\psi'_\alpha(x')$ 可以是 $\psi_\alpha(x)$ 的线性组合

$$\psi'_\alpha(x') = \sum_{\beta=1}^{4} \Lambda_{\alpha\beta}\psi_\beta(x) \tag{7.3}$$

或

$$\psi'(x') = \Lambda\psi(x), \tag{7.4}$$

Λ 必须这样的选择, 使得方程(7.2)在代入(7.1)和(7.4)以后, 恰好给出原来的方程(6.1)式.

把(7.1)和(7.4)代入(7.2)式得

$$\left(\sum_{\nu=1}^{4}\sum_{\mu=1}^{4} \gamma_\mu a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \mu\right)\Lambda\psi(x) = 0,$$

由上式左边作用 Λ^{-1} 得

$$\left(\sum_{\nu=1}^{4}\sum_{\mu=1}^{4} \Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \mu\right)\psi(x) = 0,$$

因上式必须正是(6.1), 这就要求 Λ 必须满足下面条件

$$\gamma_\nu = \sum_{\mu=1}^{4} \Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda a_{\mu\nu}. \tag{7.5}$$

利用洛伦兹变换 $a_{\mu\nu}$ 所满足的正交条件

$$\sum_\nu a_{\mu\nu} a_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\lambda}, \tag{7.6}$$

关系(7.5)又可写为

$$\sum_\nu a_{\mu\nu}\gamma_\nu = \Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda. \tag{7.7}$$

在上式中，γ_ν 和 γ_μ 是由(6.6)式给出的固定的矩阵，对于任一洛伦兹变换 $a_{\mu\nu}$，我们都可利用上式找出相应的 Λ. 作为狄拉克方程(6.1)的解的四分量波函数 ψ 一般称为狄拉克旋量. 变换(7.4)称为相应于洛伦兹变换 $a_{\mu\nu}$ 的旋量变换.

洛伦兹变换形式上可看成是 x_4 为虚数的四维欧氏空间的旋转. 现在考虑在 $x_\mu x_\nu$ 平面里的旋转. 命 $\theta_{\mu\nu}$ 为旋转的角度. 可以证明满足条件(7.7)的 Λ 为

$$\Lambda = e^{\frac{1}{2}\theta_{\mu\nu}\gamma_\mu\gamma_\nu} = \cos\frac{1}{2}\theta_{\mu\nu} + \gamma_\mu\gamma_\nu\sin\frac{1}{2}\theta_{\mu\nu}. \tag{7.8}$$

当 μ,ν 中一个指数为 4 而其余一个指数代表空间方向时，相应的坐标变换即是沿着这个空间方向相互运动的坐标之间的洛伦兹变换. 当 μ,ν 都代表空间方向时，相应的坐标变换即是在 $\mu\nu$ 平面中的坐标旋转. 在下面计算里，我们将不需要知道 Λ 的具体表达式.

用同样的考虑可以得出 $\bar{\psi}$ 在洛伦兹变换下的变换公式. 由(6.11)及(7.4)，我们得

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)\gamma_4\Lambda^{*\mathrm{T}}\gamma_4. \tag{7.9}$$

在(7.8)式中由于 x_4 是虚数，所以当 μ,ν 中只有一个等于 4 时 θ_{ij} 应为纯虚数，当 μ,ν 都不等于 4 时 θ_{ij} 应为实数. 利用这些性质，我们很容易由(7.8)得出

$$\gamma_4\Lambda^{*\mathrm{T}}\gamma_4 = \Lambda^{-1}, \tag{7.10}$$

所以(7.9)又可写为

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}. \tag{7.11}$$

由(7.4)和(7.11)，我们立刻可以证明

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x), \tag{7.12}$$

即 $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 是一个洛伦兹变换下的不变量. 由(7.4)，(7.11)和(7.7)得

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x')\gamma_\mu\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda\psi(x) \\ &= \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu}\bar{\psi}(x)\gamma_\nu\psi(x).\end{aligned} \tag{7.13}$$

这表示 $\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$ 在洛伦兹变换下是一个矢量. 同样可以证明

$$\bar{\psi}'(x')\gamma_\mu\gamma_\nu\psi'(x') = \sum_{\lambda=1}^{4}\sum_{\sigma=1}^{4} a_{\mu\lambda}a_{\nu\sigma}\bar{\psi}(x)\gamma_\lambda\gamma_\sigma\psi(x). \tag{7.14}$$

即 $\psi(x)\gamma_\mu\gamma_\nu\psi(x)$ 是一个二级张量. 由下面的等式

$$\begin{aligned}\gamma_\mu\gamma_\nu &= \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) + \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu) \\ &= \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) + \delta_{\mu\nu},\end{aligned} \tag{7.15}$$

我们看到 $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi$ 式中对 μ,ν 对称部分实际上是 $\delta_{\mu\nu}$ 乘以一个标量 $\bar{\psi}\psi$.

下面我们引入一个新的狄拉克 4×4 的矩阵

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \tag{7.16}$$

利用(7.7)得

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}\gamma_5\Lambda &= \Lambda^{-1}\gamma_1\Lambda\Lambda^{-1}\gamma_2\Lambda\Lambda^{-1}\gamma_3\Lambda\Lambda^{-1}\gamma_4\Lambda \\ &= \sum_{\lambda=1}^{4}\sum_{\tau=1}^{4}\sum_{\sigma=1}^{4}\sum_{\rho=1}^{4} a_{1\lambda}a_{2\tau}a_{3\sigma}a_{4\rho}\gamma_\lambda\gamma_\tau\gamma_\sigma\gamma_\rho. \end{aligned} \tag{7.17}$$

很容易看出只有 λ,τ,σ,ρ 的值都不相等的项对上式右边求和才有贡献. 比如当 $\lambda=\tau$ 时,由于 $\sum_{\lambda=1}^{4} a_{1\lambda}a_{2\tau} = 0$, 所以对求和无贡献. 当 λ,τ,σ,ρ 都不相同时,我们有

$$\gamma_\lambda\gamma_\tau\gamma_\sigma\gamma_\rho = (-1)^P\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = (-1)^P\gamma_5, \tag{7.17a}$$

P 为把(1,2,3,4)排成$(\lambda,\tau,\sigma,\rho)$时所需要对换的次数. 再利用下面关系

$$|a_{\mu\nu}| = \sum_{\lambda=1}^{4}\sum_{\tau=1}^{4}\sum_{\sigma=1}^{4}\sum_{\rho=1}^{4}(-1)^P a_{1\lambda}a_{2\tau}a_{3\sigma}a_{4\rho},$$

上式中的$|a_{\mu\nu}|$代表由矩阵 $a_{\mu\nu}$ 得出的行列式,(7.17)变为

$$\Lambda^{-1}\gamma_5\Lambda = |a_{\mu\nu}|\gamma_5. \tag{7.18}$$

当 $a_{\mu\nu}$ 代表正洛伦兹变换即形式上代表前述四维空间的旋转时,$|a_{\mu\nu}|=1$. 但当 $a_{\mu\nu}$ 代表普通三维空间的反演时,$|a_{\mu\nu}|=-1$. 这个反演可由下列变换表示:

$$x_1' = -x_1, \quad x_2' = -x_2, \quad x_3' = -x_3, \quad x_4' = +x_4. \tag{7.19}$$

和变换的一般形式(7.1)比较,我们得

$$\begin{aligned} &a_{11} = a_{22} = a_{33} = -1, \quad a_{44} = 1; \\ &a_{\mu\nu} = 0, \quad 当\ \mu \neq \nu. \end{aligned} \tag{7.20}$$

(7.7)式变为

$$\begin{aligned} &\Lambda^{-1}\gamma_i\Lambda = -\gamma_i, \quad (i = 1,2,3) \\ &\Lambda^{-1}\gamma_4\Lambda = \gamma_4. \end{aligned} \tag{7.21}$$

由(7.18)得

$$\Lambda^{-1}\gamma_5\Lambda = -\gamma_5, \tag{7.22}$$

上式也可由(7.21)式的相乘得出. 我们很容易找出满足(7.21)和(7.22)两式的 Λ 为[①]

$$\Lambda = \eta_P\gamma_4. \quad (\eta_P = \pm 1, \pm i) \tag{7.23}$$

现在我们可以继续找出由 $\bar{\psi}$ 和 ψ 所组成的更高一级的张量. 我们先考虑 $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\psi$. 当 μ,ν,λ 的值有任意两个相同时,这个式子都可写成已考虑过的形式

① η_P 可取为$\pm i$的原因是在两次反演后 ψ 可变为$-\psi$.

$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$. 当 μ,ν,λ 都不相同时,由(7.17a)得

$$\gamma_\tau\gamma_5 = (-1)^P\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda. \tag{7.24}$$

式中 τ,μ,ν,λ 都不相等,P 为把(1,2,3,4)排成(τ,μ,ν,λ)所需的对换次数. 引入定义

$$\varepsilon_{\tau\mu\nu\lambda} = (-1)^P; \quad (\text{当 } \tau,\mu,\nu,\lambda \text{ 都不相等时})$$

$$\varepsilon_{\tau\mu\nu\lambda} = 0. \quad (\text{当上面条件不被满足时})$$

我们可写

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\psi = \sum_\tau \varepsilon_{\tau\mu\nu\lambda}\bar{\psi}\gamma_\tau\gamma_5\psi + \delta_{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma_\lambda\psi + \delta_{\nu\lambda}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - \delta_{\mu\lambda}\bar{\psi}\gamma_\nu\psi. \tag{7.25}$$

由(7.18)我们看到在正洛伦兹变换下,

$$\bar{\psi}'\gamma_\tau\gamma_5\psi' = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\tau\nu}\bar{\psi}\gamma_\nu\gamma_5\psi. \tag{7.26}$$

所以在正洛伦兹变换下,$\bar{\psi}\gamma_\tau\gamma_5\psi$ 的变换公式和 $\bar{\psi}\gamma_\tau\psi$ 的变换公式相同. 但在空间反演变换(7.19)之下,它们的变换公式分别为($\tau\neq 4$):

$$\bar{\psi}'\gamma_\tau\psi' = -\bar{\psi}\gamma_\tau\psi, \tag{7.27}$$

$$\bar{\psi}'\gamma_\tau\gamma_5\psi' = +\bar{\psi}\gamma_\tau\gamma_5\psi. \tag{7.28}$$

即在空间反演下,$\bar{\psi}\gamma_\tau\psi$ 的变换公式和通常的矢量一样,而 $\bar{\psi}\gamma_\tau\gamma_5\psi$ 的变换公式则和两个矢量的矢量乘积一样. 所以我们称 $\bar{\psi}\gamma_\tau\gamma_5\psi$ 为赝矢量(或轴矢量).

由 $\bar{\psi}$ 和 ψ 组成的另一个协变量是赝标量. 它由下式

$$\bar{\psi}\gamma_5\psi \tag{7.29}$$

给出. 很容易证明,在正洛伦兹变换下,上式是一个不变量,但在空间反演下变号. 我们称(7.29)为赝标量.

上面的计算和讨论指出由 $\psi,\bar{\psi}$ 和 γ_μ 可以做成五个独立的协变量:标量 $\bar{\psi}\psi$,矢量 $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$,反对称张量 $\bar{\psi}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)\psi$,赝矢量 $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ 和赝标量 $\bar{\psi}\gamma_5\psi$.

在写出上面几种协变量时,我们还没有引入 ψ 或 $\bar{\psi}$ 对 x_μ 的微商. 如果引入这些微商,那么就可得出更多的协变量. 比如,我们可以得出下面这个对称的二级张量

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\nu\psi - \bar{\psi}\gamma_\nu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\nu}\gamma_\mu\psi - \bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}\right). \tag{7.30}$$

在§4中我们曾经指出,所有的物理观察量都必须是洛伦兹变换下的协变量. 作为电荷电流四维矢量密度可以取表示式为

$$j_\mu = ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \tag{7.31}$$

利用波动方程(6.1)和(6.12),立刻可以证明

$$\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}=0. \tag{7.32}$$

这个结果证实选择(7.31)是正确的. 在§4中我们曾注意到一个经典场的物理观察量是等于把这个场的波函数ψ看成几率幅根据薛定谔理论所给出的这个物理量的平均值. 利用这个线索,我们得出狄拉克场的能量动量张力张量密度应为

$$T_{\mu\nu}=-\bar{\psi}\gamma_\nu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}. \tag{7.33}$$

利用狄拉克方程(6.1)和(6.12),我们得

$$\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\nu}T_{\mu\nu}=-\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\nu}\gamma_\nu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}-\sum_{\nu=1}^{4}\bar{\psi}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\gamma_\nu\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}$$
$$=-\mu\bar{\psi}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi+\mu\bar{\psi}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi=0. \tag{7.34}$$

上式代表能量动量张力张量密度所满足的守恒定律. 由(7.33)得能量和动量密度为

$$p_\mu=\mathrm{i}T_{\mu4}=-\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_4\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi=-\mathrm{i}\psi^{*T}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi. \tag{7.35}$$

场的总能量和动量矢量为

$$P_\mu=\mathrm{i}\int T_{\mu4}\mathrm{d}V=\int\psi^{*T}\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)\psi\mathrm{d}V. \tag{7.36}$$

除开缺少一个因子$\hbar$外,上式正是当ψ被解释为单个粒子的几率幅时P_μ的平均值.

由(7.33)式给出的$T_{\mu\nu}$对于标数μ,ν是不对称的,为着得出角动量守恒定律我们必须给出对于μ,ν对称的能量动量张力张量. 这样的张量可由对$T_{\mu\nu}$的对称化给出,即

$$\Theta_{\mu\nu}=\frac{1}{4}(T_{\mu\nu}+T_{\nu\mu}+T'_{\mu\nu}+T'_{\nu\mu}), \tag{7.37}$$

式中

$$T'_{\mu\nu}=\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\nu\psi=T^*_{\mu\nu}.$$

$T'_{\mu\nu}$的引入使得$\Theta_{\mu\nu}-\Theta_{\nu\mu}$只取实数的值. (7.37)正是由(7.30)给出的式子. 利用(6.1),(6.12)和(6.4)很容易验证$\Theta_{\mu\nu}$满足下面的守恒条件:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\Theta_{\mu\nu}=0. \tag{7.38}$$

和前面所讨论的介子场的情形一样,我们得出总角动量张量密度的式子为

$$m_{\mu\nu\rho}=[x_\mu\Theta_{\nu\rho}-x_\nu\Theta_{\mu\rho}]. \tag{7.39}$$

由(7.38)得

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho}m_{\mu\nu\rho}=\frac{\partial}{\partial x_\rho}(x_\mu\Theta_{\nu\rho}-x_\nu\Theta_{\mu\rho})=[\Theta_{\nu\mu}-\Theta_{\mu\nu}]=0. \tag{7.40}$$

对上式取整个三维空间的积分给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_4}\int m_{\mu\nu4}\mathrm{d}V+\sum_{i=1}^{3}\int\frac{\partial}{\partial x_i}m_{\mu\nu i}\mathrm{d}V=0.$$

应用推导出(4.17b)式时所用相同的考虑，我们得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_{\mu\nu}=0,\tag{7.41}$$

式中

$$M_{\mu\nu}=\mathrm{i}\int m_{\mu\nu4}\mathrm{d}V.\tag{7.42}$$

从上面结果我们看到，$M_{\mu\nu}$代表狄拉克场的总角动量反对称张量，因为它有和这个张量完全相同的协变性质和满足相同的守恒定律.

下面我们将指出 $M_{\mu\nu}$包括轨道角动量 $L_{\mu\nu}$和自旋角动量两个部分.

由(7.42)，(7.39)和(7.30)三式，我们得

$$\begin{aligned}M_{ij}=\frac{\mathrm{i}}{4}\int\Big\{&x_i\Big(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_j}\gamma_4\psi-\bar{\psi}\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_4}\gamma_j\psi-\bar{\psi}\gamma_j\frac{\partial\psi}{\partial x_4}\Big)\\&-x_j\Big(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_i}\gamma_4\psi-\bar{\psi}\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_4}\gamma_i\psi-\bar{\psi}\gamma_i\frac{\partial\psi}{\partial x_4}\Big)\Big\}\mathrm{d}V.\end{aligned}\tag{7.43}$$

利用(6.1)和(6.12)上式中包含 γ_i 及 γ_j 的项可写为

$$\begin{aligned}+\frac{\mathrm{i}}{4}\int\Big\{&x_i\Big(-\sum_{s=1}^{3}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_s}\gamma_s\gamma_4\gamma_j\psi+\sum_{s=1}^{3}\bar{\psi}\gamma_j\gamma_4\gamma_s\frac{\partial\psi}{\partial x_s}\Big)\\&-x_j\Big(-\sum_{s=1}^{3}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_s}\gamma_s\gamma_4\gamma_i\psi+\sum_{s=1}^{3}\bar{\psi}\gamma_i\gamma_4\gamma_s\frac{\partial\psi}{\partial x_s}\Big)\Big\}\mathrm{d}V.\end{aligned}\tag{7.44}$$

上式中含 x_i 项中 $s=j$ 的部分和含 x_j 项中 $s=i$ 的部分恰好等于(7.43)中含 γ_4 的项. 把这些项加在一起，我们得出 M_{ij}的第一部分为

$$L_{ij}=\frac{\mathrm{i}}{2}\int\Big\{x_i\Big(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_j}\gamma_4\psi-\bar{\psi}\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\Big)-x_j\Big(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_i}\gamma_4\psi-\psi\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\Big)\Big\}\mathrm{d}V.\tag{7.45}$$

利用部分积分法得

$$\int x_i\Big(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_j}\gamma_4\psi\Big)\mathrm{d}V=\int\frac{\partial}{\partial x_j}(x_i\bar{\psi}\gamma_4\psi)\mathrm{d}V-\int x_i\Big(\bar{\psi}\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\Big)\mathrm{d}V-\int\delta_{ij}\bar{\psi}\gamma_4\psi\mathrm{d}V.$$

上式中最后一项将在代入(7.45)中后被消去. 右边第一项可以用高斯定理变成一个在无穷远的面积分. 因为在空间的无穷远处 $\psi=0$，所以这个面积分等于零. 于是，

$$\int x_i\Big(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_j}\gamma_4\psi\Big)\mathrm{d}V=-\int x_i\Big(\bar{\psi}\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\Big)\mathrm{d}V,$$

交换 i,j 得

$$\int x_j\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_j}\gamma_4\psi\right)\mathrm{d}V=-\int x_j\left(\bar{\psi}\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}V,$$

将上两式代入(7.45)立刻得到

$$L_{ij}=-\mathrm{i}\int\bar{\psi}\gamma_4\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_j}-x_j\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\psi\mathrm{d}V. \tag{7.46}$$

上式正是通常量子力学里轨道角动量的平均值.

其次我们还需考虑(7.44)含 x_i 的项中 $s=i$ 和含 x_j 的项中 $s=j$ 部分. 这部分可写为

$$S_{ij}=\frac{\mathrm{i}}{4}\int\left\{-x_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\psi}\gamma_i\gamma_4\gamma_j\psi)+x_j\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\psi}\gamma_j\gamma_4\gamma_i\psi)\right\}\mathrm{d}V,$$

应用部分积分法并注意在无穷远的面积分等于零,我们得

$$\begin{aligned}S_{ij}&=\frac{-\mathrm{i}}{2}\int\bar{\psi}\gamma_4(\gamma_i\gamma_j)\psi\mathrm{d}V\\&=\frac{1}{2}\int\bar{\psi}\gamma_4\sigma_{ij}\psi\mathrm{d}V.\end{aligned} \tag{7.47}$$

式中 $\sigma_{ij}=-\mathrm{i}\gamma_i\gamma_j$ 是下列矩阵:

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_{ij} & 0\\ 0 & \sigma_{ij}\end{bmatrix}, \tag{7.48}$$

在上式右边出现的 σ_{ij} 是通常 2×2 的自旋矩阵.

最后,(7.44)中还包含 s 不等于 i 也不等于 j 的项. 很容易看出,这项可以应用高斯定理变成在无穷远的面积分. 按照我们的处理,所有在无穷远的面积分的值都为零.

从上面计算,我们得 M_{ij} 的最后表达式为

$$M_{ij}=L_{ij}+S_{ij}, \tag{7.49}$$

L_{ij} 和 S_{ij} 分别由(7.46)和(7.47)给出. S_{ij} 代表场的自旋角动量. 它代表总角动量中不属于轨道角动量的部分. 对于经典的场,因为不产生对 ψ 归一化的问题,ψ 的值是可以任意的,因此 L_{ij} 和 S_{ij} 的值可取任意的数值.

§8 狄拉克场的量子理论①

利用(6.21)和(6.25),我们可把狄拉克方程最普遍的解用下面展开式表出:

$$\psi=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sum_{s=1}^{2}\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\{\alpha_s(\boldsymbol{k},t)u_s(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\beta_s^*(\boldsymbol{k},t)v_s(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\}, \tag{8.1}$$

① 从本节开始,我们将采用"自然单位"系统. 在这个单位系统里 $\hbar$ 和 c 的值都等于 1(即 $\hbar=c=1$).

式中

$$\alpha_s(\boldsymbol{k},t) = \alpha_s(\boldsymbol{k})e^{-ik_0 t},$$
$$\beta_s(\boldsymbol{k},t) = \beta_s(\boldsymbol{k})e^{ik_0 t}, \tag{8.2}$$

$$u_s(\boldsymbol{k}) = N\begin{bmatrix} \varphi_s \\ \frac{(\boldsymbol{\sigma k})}{k_0+\mu}\varphi_s \end{bmatrix}, \quad v_s(\boldsymbol{k}) = N\begin{bmatrix} \frac{(\boldsymbol{\sigma k})}{k_0+\mu}\varphi_s \\ \varphi_s \end{bmatrix}, \tag{8.3}$$

$$k_0 = +\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}. \tag{8.4}$$

在(8.1)的右边第二项中和在(8.3)的第二式中我们曾以$-\boldsymbol{k}$代替原式中$\boldsymbol{k}$(即此处的$v(\boldsymbol{k})\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$相当于薛定谔理论里动量为$-\boldsymbol{k}$能量为$-k_0$的解).(8.3)中归一常数$N$可由下面的归一条件

$$\bar{u}_s(\boldsymbol{k})u_s(\boldsymbol{k}) = u_s^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{k})\gamma_4 u_s(\boldsymbol{k}) = 1,$$
$$\bar{v}_s(\boldsymbol{k})v_s(\boldsymbol{k}) = v_s^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{k})\gamma_4 v_s(\boldsymbol{k}) = -1,$$

推导出,为

$$N = \sqrt{\frac{k_0+\mu}{2\mu}}. \tag{8.5}$$

(8.1)式相当于介子场在进行量子化时的展开式(5.1).由(8.2)我们看到$\alpha_s(\boldsymbol{k},t)$也满足和(5.2)相同的运动方程,即

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\alpha_s(\boldsymbol{k},t) + k_0^2\alpha_s(\boldsymbol{k},t) = 0, \tag{8.6}$$

式中k_0由(8.4)给出.

像§5中对介子场的处理一样,为了找出这个振动的正则动量和正则坐标,我们先把(8.1)代入由(7.36)给出的总能量.我们得

$$\begin{aligned} E &= \int\psi^{*\mathrm{T}}\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi\mathrm{d}V \\ &= \sum_{s=1}^{2}\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\frac{k_0^2}{\mu}[\alpha_s^*(\boldsymbol{k},t)\alpha_s(\boldsymbol{k},t) - \beta_s(\boldsymbol{k},t)\beta_s^*(\boldsymbol{k},t)]. \end{aligned} \tag{8.7}$$

引入

$$\alpha_s(\boldsymbol{k},t) = \sqrt{\frac{\mu}{k_0}}a_s(\boldsymbol{k},t),$$
$$\beta_s(\boldsymbol{k},t) = \sqrt{\frac{\mu}{k_0}}b_s(\boldsymbol{k},t), \tag{8.8}$$

上式变为

$$E = \sum_{s=1}^{2}\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}k_0[a_s^*(\boldsymbol{k},t)a_s(\boldsymbol{k},t) - b_s(\boldsymbol{k},t)b_s^*(\boldsymbol{k},t)]. \tag{8.9}$$

从上式我们看到E作为一个经典场的能量可以取负值,因含$b_s(\boldsymbol{k},t)$的项对能量的

贡献是负的. 下面我们将看到, 如果按照费米统计对狄拉克场进行量子化, 那么这个负能困难将不在量子理论中出现.

(8.9)式和介子场的(5.11)式完全相当. 在(8.9)式中出现的 $a_s(\boldsymbol{k},t)$, $a_s^*(\boldsymbol{k},t)$ 等与正则动量和正则坐标的关系可以像以前一样由下式给出:

$$
\begin{aligned}
a_s(\boldsymbol{k}) &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2k_0}}[P_{1s}(\boldsymbol{k}) - \mathrm{i}k_0 Q_{1s}(\boldsymbol{k})], \\
a_s^*(\boldsymbol{k}) &= \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2k_0}}[P_{1s}(\boldsymbol{k}) + \mathrm{i}k_0 Q_{1s}(\boldsymbol{k})], \\
b_s(\boldsymbol{k}) &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2k_0}}[P_{2s}(\boldsymbol{k}) - \mathrm{i}k_0 Q_{2s}(\boldsymbol{k})], \\
b_s^*(\boldsymbol{k}) &= \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2k_0}}[P_{2s}(\boldsymbol{k}) + \mathrm{i}k_0 Q_{2s}(\boldsymbol{k})],
\end{aligned}
\tag{8.10}
$$

在上式中我们曾略去变数 t. 代入(8.9)得

$$
E = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\cdot\{[P_{1s}(\boldsymbol{k})^2 + k_0^2 Q_{1s}(\boldsymbol{k})^2] - [P_{2s}(\boldsymbol{k})^2 + k_0^2 Q_{2s}(\boldsymbol{k})^2]\}. \tag{8.11}
$$

从上式也看到简谐振动 P_{2s}, Q_{2s} 所贡献的能量是负的.

由于狄拉克粒子满足费米统计, 按照 § 2 中二次量子化描述所指示的量子化方式, 我们引入如下的量子化条件:

$$
[a_s(\boldsymbol{k}), a_{s'}^*(\boldsymbol{k}')]_+ = \delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'), \tag{8.12}
$$

$$
[b_s(\boldsymbol{k}), b_{s'}^*(\boldsymbol{k}')]_+ = \delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'), \tag{8.13}
$$

其余反对易括号 $= 0$.

顺便指出, 按照上式进行量子化的简谐振动不能像通常对易条件那样导致一个薛定谔微分方程, 因为任一个由微分方程描写的量子体系都将有无穷多个能级, 而在现在所考虑的情形里, 每个简谐振动只允许有两个能级, 即代表没有粒子的基态和存在一个粒子的激发态.

利用反对易关系(8.12), 我们可把(8.9)式写为

$$
E = \sum_{s=1}^{2}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}k_0[a_s^*(\boldsymbol{k})a_s(\boldsymbol{k}) + b_s^*(\boldsymbol{k})b_s(\boldsymbol{k}) - 1]. \tag{8.14}
$$

由 § 2 所得结果, 我们看到 $a_s^*(\boldsymbol{k})a_s(\boldsymbol{k})$ 和 $b_s^*(\boldsymbol{k})b_s(\boldsymbol{k})$ 应代表两种粒子的粒子数算符 $n_s^{(+)}(\boldsymbol{k})$ 和 $n_s^{(-)}(\boldsymbol{k})$. 上式中 -1 这一项与粒子数 $n_s^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$ 无关并且对积分的贡献为无穷大. 这个无穷大的能量对观察没有任何影响而且不能转变成其他形式的能, 这个无穷大的能量实际上和当振动按照玻色统计进行量子化时所得的无穷大的零点能是完全一样的, 所以可以经过适当地选择能的零点而予以消除. 这样, 狄拉克经典场的负能困难在按费米统计过渡到量子场以后即不再出现.

同样计算由(7.36)给出的总动量为

$$P = \sum_{s=1}^{2}\int d^3k\boldsymbol{k}\{a_s^*(\boldsymbol{k})a_s(\boldsymbol{k}) + b_s^*(\boldsymbol{k})b_s(\boldsymbol{k})\}. \tag{8.15}$$

上面结果指出，相应于振动 $\boldsymbol{k}$ 的能量子动量和能量分别为 $\boldsymbol{k}$ 和 $\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}$. 如果我们把这个量子看作一个粒子，那么这个粒子的质量应为 μ（实际上是 $\hbar\mu/c$，在我们所用的单位里 $\hbar=c=1$）.

其次，我们考虑狄拉克场的总电荷 Q，

$$Q = \varepsilon\int\bar{\psi}\gamma_4\psi dV,$$

代入(8.1)和(8.8)得

$$\begin{aligned} Q &= \varepsilon\sum_{s=1}^{2}\int d^3k[a_s^*(\boldsymbol{k})a_s(\boldsymbol{k}) + b_s(\boldsymbol{k})b_s^*(\boldsymbol{k})] \\ &= \varepsilon\sum_{s=1}^{2}\int d^3k[n_s^{(+)}(\boldsymbol{k}) - n_s^{(-)}(\boldsymbol{k}) + 1]. \end{aligned} \tag{8.16}$$

从上面结果我们看到 $n_s^{(+)}(\boldsymbol{k})$代表电荷为 ε 的粒子数，$n_s^{(-)}(\boldsymbol{k})$代表电荷为 $-\varepsilon$ 的粒子数. 前一种粒子称为“粒子”，后一种粒子称为“反粒子”. 上面结果指出粒子和反粒子带有相反的电荷. ε 代表电荷最小的单位. 目前所有的带电的场的 ε 值都是相同的.

下面我们将给出一个动量为 $\boldsymbol{k}$ 的粒子的自旋角动量. 我们只需要考虑前进矢量为 $\boldsymbol{k}$ 的单色波 $\psi_{\boldsymbol{k}}$，由(7.47)式得

$$S_i = \frac{1}{2}\int\psi_{\boldsymbol{k}}^{*\mathrm{T}}\sigma_i\psi_{\boldsymbol{k}}dV, \tag{8.17}$$

积分区域是单个粒子态的归一化空间 $V=(2\pi)^3$（参阅 26 和 99 页），

$$\psi_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{\mu}{k_0}}[a_s(\boldsymbol{k})u_s(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + b_s^*(\boldsymbol{k})v_s(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}]. \tag{8.18}$$

取 $s=\pm 1/2$ 代表 φ_s 为由(6.28)式给出的本征值为 $\pm 1/2$ 的态. 由(6.28)和(6.30)得

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}(\boldsymbol{\sigma k})u_{\pm 1/2}(\boldsymbol{k}) &= \pm u_{\pm 1/2}(\boldsymbol{k}), \\ \frac{1}{k}(\boldsymbol{\sigma k})v_{\pm 1/2}(\boldsymbol{k}) &= \pm v_{\pm 1/2}(\boldsymbol{k}). \end{aligned} \tag{8.19}$$

如果取 i 的方向平行于 $\boldsymbol{k}$ 的方向，我们得

$$\sigma_i = \frac{1}{k}(\boldsymbol{\sigma k}), \tag{8.20}$$

将(8.18)代入(8.17)，并利用(8.19)和(8.20)，我们得

$$\sum_s S_i = \frac{1}{2}[a_{+1/2}^*(\boldsymbol{k})a_{+1/2}(\boldsymbol{k}) - a_{-1/2}^*(\boldsymbol{k})a_{-1/2}(\boldsymbol{k})$$

$$+b_{+1/2}(\boldsymbol{k})b^{*}_{+1/2}(\boldsymbol{k})-b_{-1/2}(\boldsymbol{k})b^{*}_{-1/2}(\boldsymbol{k})]$$

$$=\frac{1}{2}[a^{*}_{+1/2}(\boldsymbol{k})a_{+1/2}(\boldsymbol{k})-a^{*}_{-1/2}(\boldsymbol{k})a_{-1/2}(\boldsymbol{k})$$

$$-b^{*}_{+1/2}(\boldsymbol{k})b_{+1/2}(\boldsymbol{k})+b^{*}_{-1/2}(\boldsymbol{k})b_{-1/2}(\boldsymbol{k})]. \tag{8.21}$$

上式右边第一项代表自旋沿 $\boldsymbol{k}$ 的方向等于 1/2 的粒子数. 第二项代表自旋沿 $\boldsymbol{k}$ 的方向等于 −1/2 的粒子数. 第三项代表自旋沿 $\boldsymbol{k}$ 方向为 −1/2 的反粒子数, 第四项代表自旋沿 $\boldsymbol{k}$ 方向为 +1/2 的反粒子数. 从上面结果, 我们看到反粒子的自旋方向和它的自旋波函数 $v_s(\boldsymbol{k})$ 在(8.19)式中所示的方向相反.

为着以后计算的需要, 我们在下面给出 ψ 和 $\bar{\psi}$ 所满足的反对易关系, 在(8.1)中代人(8.8)和(8.2), 我们得

$$\psi=\psi^{(-)}+\psi^{(+)},\quad \bar{\psi}=\bar{\psi}^{(-)}+\bar{\psi}^{(+)},$$

$$\psi^{(-)}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sum_s\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\sqrt{\frac{\mu}{k_0}}a_s(\boldsymbol{k})u_s(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)},$$

$$\psi^{(+)}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sum_s\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\sqrt{\frac{\mu}{k_0}}b^{*}_s(\boldsymbol{k})v_s(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx)},$$

$$\bar{\psi}^{(-)}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sum_s\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\sqrt{\frac{\mu}{k_0}}b_s(\boldsymbol{k})\bar{v}_s(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}, \tag{8.22}$$

$$\bar{\psi}^{(+)}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sum_s\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\sqrt{\frac{\mu}{k_0}}a^{*}_s(\boldsymbol{k})\bar{u}_s(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx)},$$

式中

$$(kx)=\sum_{\mu=1}^{4}k_\mu x_\mu=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-k_0t,$$

$$u_r(\boldsymbol{k})=N\begin{bmatrix}\varphi_r\\ \dfrac{(\boldsymbol{\sigma k})}{k_0+\mu}\varphi_r\end{bmatrix},\quad v_r(\boldsymbol{k})=N\begin{bmatrix}\dfrac{(\boldsymbol{\sigma k})}{k_0+\mu}\varphi_{-r}\\ \varphi_{-r}\end{bmatrix},\quad (r=\pm 1/2) \tag{8.22a}$$

利用对易关系(8.12)得

$$[\psi^{(-)}_\alpha(x),\bar{\psi}^{(+)}_\beta(x')]_+=\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\frac{\mu}{k_0}\sum_s u_{s\alpha}(\boldsymbol{k})\bar{u}_{s\beta}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k,x-x')},$$

$$[\psi^{(+)}_\alpha(x),\bar{\psi}^{(-)}_\beta(x')]_+=\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\frac{\mu}{k_0}\sum_s v_{s\alpha}(\boldsymbol{k})\bar{v}_{s\beta}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k,x-x')}. \tag{8.23}$$

由(8.3)式得

$$\sum_s u_s(\boldsymbol{k})\bar{u}_s(\boldsymbol{k})=\sum_s N^2\begin{bmatrix}\varphi_s\\ \dfrac{(\boldsymbol{\sigma k})}{k_0+\mu}\varphi_s\end{bmatrix}\left(\varphi_s^{*},-\varphi_s^{*}\frac{(\boldsymbol{\sigma k})}{k_0+\mu}\right)$$

$$= N^2 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{(\boldsymbol{\sigma k})}{k_0+\mu} \\ \frac{(\boldsymbol{\sigma k})}{k_0+\mu} & \frac{\boldsymbol{k}^2}{(k_0+\mu)^2} \end{bmatrix}.$$

在上面计算里，我们曾应用等式

$$\sum_s \varphi_s \varphi_s^* = 1.$$

利用(8.5)式及等式

$$\frac{\mu - k_0}{2\mu} = -\frac{\boldsymbol{k}^2}{2\mu(\mu+k_0)}, \quad N^2 = \frac{k_0+\mu}{2\mu},$$

我们得

$$\sum_{s=\pm 1/2} u_s(\boldsymbol{k})\bar{u}_s(\boldsymbol{k}) = \begin{bmatrix} \frac{k_0+\mu}{2\mu} & -\frac{(\boldsymbol{\sigma k})}{2\mu} \\ \frac{(\boldsymbol{\sigma k})}{2\mu} & -\frac{k_0-\mu}{2\mu} \end{bmatrix} = \frac{\mu + \gamma_4 k_0 - \mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k}}{2\mu}$$

$$= \frac{1}{2\mu}\Big(-\mathrm{i}\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu k_\mu + \mu\Big). \tag{8.24}$$

同样计算给出

$$\sum_{s=\pm 1/2} v_s(\boldsymbol{k})\bar{v}_s(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{2\mu}\Big(-\mathrm{i}\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu k_\mu - \mu\Big). \tag{8.25}$$

代入(8.23)得

$$[\psi_\alpha^{(-)}(x), \bar{\psi}_\beta^{(-)}(x')]_+ = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\, \frac{1}{2k_0}\Big(-\mathrm{i}\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu k_\mu + \mu I\Big)_{\alpha\beta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k, x-x')}$$

$$= -\mathrm{i}\Big(-\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \mu I\Big)_{\alpha\beta}\Delta^{(-)}(x-x'), \tag{8.26}$$

式中 I 为 4×4 单位矩阵，

$$\Delta^{(-)}(x-x') = \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\, \frac{1}{2k_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k, x-x')}. \tag{8.27}$$

同样计算给出

$$[\psi_\alpha^{(+)}(x), \bar{\psi}_\beta^{(+)}(x')] = -\mathrm{i}\Big(-\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \mu I\Big)_{\alpha\beta}\Delta^{(+)}(x-x'), \tag{8.28}$$

式中

$$\Delta^{(+)}(x-x') = -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\, \frac{1}{2k_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k, x-x')}. \tag{8.29}$$

由(8.26)和(8.28)两式得

$$[\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')]_+ = -\mathrm{i}\Big(-\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \mu I\Big)_{\alpha\beta}\Delta(x-x'), \tag{8.30}$$

式中

$$\Delta(x-x') = \Delta^{(-)}(x-x') + \Delta^{(+)}(x-x'). \tag{8.31}$$

这正是介子场的量子理论中由(5.23)引入的函数. 引入下列定义,

$$S_{\alpha\beta}^{(\mp)}(x-x') = \left(-\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \mu I\right)_{\alpha\beta} \Delta^{(\pm)}(x-x'), \tag{8.32}$$

上面所得的对易关系可写为

$$\begin{aligned} &[\psi_\alpha^{(\mp)}(x), \bar{\psi}_\beta^{(\pm)}(x')]_+ = -\mathrm{i}S_{\alpha\beta}^{(\mp)}(x-x'), \\ &[\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')]_+ = -\mathrm{i}S_{\alpha\beta}(x-x'), \end{aligned} \tag{8.33}$$

式中

$$S_{\alpha\beta}(x-x') = S_{\alpha\beta}^{(-)}(x-x') + S_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x'). \tag{8.34}$$

因为与 t 有关的 $\psi(x)$ 是海森伯表象中的算符,(8.33)和(8.34)给出在海森伯表象中的对易关系. 在薛定谔表象中的对易关系可由代换 $x_4 = x_4'$ 得出. 很容易验证 $\Delta(x-x')$ 满足下面关系:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial t}\Delta(x-x')\right]_{t=t'} = \delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \\ &\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta(x-x')\right]_{t=t'} = 0. \end{aligned} \tag{8.35}$$

于是在薛定谔表象中相应于(8.33)第二式的对易关系为

$$[\psi_\alpha(\boldsymbol{r}), \bar{\psi}_\beta(\boldsymbol{r}')]_+ = \gamma_{4\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{8.36}$$

或

$$[\psi_\alpha(\boldsymbol{r}), \psi_\beta^*(\boldsymbol{r}')]_+ = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{8.37}$$

相应于(8.33)第一式的对易关系不能很简单地写出,因为当 $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}'$ 时,

$$[\psi_\alpha^{(\pm)}(\boldsymbol{r}), \bar{\psi}_\beta^{(\mp)}(\boldsymbol{r}')]_+ \neq 0. \tag{8.38}$$

我们注意到作用于(8.32)式右边的 $\Delta(x-x')$ 的微分算符正是由(6.3a)式引入的算符. 它和狄拉克方程里作用于 ψ 的算符的差别只在于改变了 μ 项的符号.

下面我们将讨论对易关系(8.33)在洛伦兹变换下的不变性. 引入洛伦兹变换

$$x_\mu \rightarrow y_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} x_\nu,$$

在这个变换下,$\psi(x)$ 的变换为

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(y) = \Lambda\psi(x).$$

于是在新坐标中的对易关系为

$$[\psi_\sigma'^{(\mp)}(y), \bar{\psi}_\rho'^{(\pm)}(y')]_+ = \sum_{\alpha,\beta}\Lambda_{\sigma\alpha}[\psi_\alpha^{(\mp)}(x), \bar{\psi}_\beta^{(\pm)}(x')]_+ \Lambda_{\beta\rho}^{-1}$$

$$-\sum_{\alpha\beta}\Lambda_{\sigma\alpha}\left(\mathrm{i}\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_{\mu,\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\mathrm{i}\mu\delta_{\alpha\beta}\right)\Lambda_{\beta\rho}^{-1}\Delta^{(\mp)}(y-y').$$

因为 $\Delta^{(\mp)}$ 函数是洛伦兹变换下的不变量，所以在上式中我们已经代入

$$\Delta^{(\mp)}(x-x')=\Delta^{(\mp)}(y-y').$$

利用(7.7)式立刻得到

$$\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\alpha,\beta}\Lambda_{\sigma\alpha}\gamma_{\mu,\alpha\beta}\Lambda_{\beta\rho}^{-1}\frac{\partial}{\partial x_\mu}=\sum_{\nu=1}^{4}\sum_{\mu=1}^{4}\left(a_{\nu\mu}\gamma_\nu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)_{\sigma\rho}$$
$$=\sum_{\nu=1}^{4}\left(\gamma_\nu\frac{\partial}{\partial y_\nu}\right)_{\sigma\rho},$$

于是

$$[\psi_\sigma'^{(\mp)}(y),\bar{\psi}_\rho'^{(\pm)}(y')]_+=-\mathrm{i}\left(-\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial y_\mu}+\mu I\right)_{\sigma\rho}\Delta^{(\mp)}(y-y').$$

所以在坐标 y_μ 中的对易关系和在坐标 x_μ 中的完全相同，这说明对易关系是不变的.

最后，我们将讨论狄拉克量子场的经典极限.

和量子的介子场一样，我们可以分别考虑狄拉克场的经典波动极限和经典粒子极限.(8.9)式指出经典的狄拉克场存在有负能困难，这意味着如果量子的狄拉克场可以趋于经典波动极限的话，那么在这个极限的情况里，仍将陷入负能困难.下面我们将指出按照费米统计进行量子化的狄拉克场是不可能趋于经典波动的极限的. §5 中的讨论指出经典波动极限是处于相同情态的粒子数目很大时的极限.由于狄拉克场满足费米统计，相同情态的粒子数不可能大于 1，因此，粒子数很大的情况是根本没有的，这说明对于狄拉克粒子经典波动的极限是不存在的.

狄拉克量子场的非相对论的经典粒子的极限可以和介子场的情况一样地得到.这个经典粒子的极限正是薛定谔单粒子波动方程的经典极限.但是在这里我们必须澄清一个重要的问题，这个问题是：在狄拉克粒子的经典粒子的极限里，自旋代表什么物理现象？我们知道狄拉克波动方程在非相对论极限下趋于泡利方程而不趋于薛定谔波动方程，描写狄拉克粒子自旋角动量的算符是由下面的对易关系给出的：

$$[\sigma_i,\sigma_j]_+=2\delta_{ij}.\quad(i,j=1,2,3)$$

我们看到电子自旋角动量的量子化条件是和按照费米统计进行量子化的条件一样的.像所有按照费米统计进行量子化的运动自由度一样，狄拉克粒子的自旋是没有经典极限的.只有当外电磁场的电场和磁场强度很微弱，以致泡利波动方程中含 σ_i 的项可以略去不计时，我们才能够完全地过渡到经典粒子的极限.

在这里我们可以重提一下在 §2 结束以前所提出的问题：为什么从经典粒子理论过渡到量子理论时不可以用反对易关系？对这个问题的回答是，如果由经典

粒子到量子理论的过渡是通过反对易关系，那么将不会有经典粒子的极限. 前面对简谐振子的反对易量子化和上面对自旋角动量的量子化都说明这一点.

§9 对电磁场的纵场和标量场进行形式上的量子化

在§1中我们曾介绍过电磁辐射的量子理论. 在那里，我们曾引入洛伦兹规范，在这个规范里，描写电磁场的四维矢量势 A_μ 的时间分量 $A_4 = iA_0$ 等于零. 因此 A_μ 所满足的辅助条件为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0. \tag{9.1}$$

当我们只考虑自由电磁场的量子现象时，洛伦兹规范显然是最简单的，因为(9.1)式非常明显地指出，电磁波是一个横波. 但我们立刻看到(9.1)式在洛伦兹变换下不是协变的. 再者，当我们考虑电磁场和带电粒子的相互作用时，由 A_0 代表的库仑场是无法消除的. 因此，为着使理论推导明显地显示出洛伦兹变换下的协变性，和便于处理电磁场和电荷间的相互作用，我们必须不用洛伦兹规范. 在一般规范中 $(A_0 \neq 0)$，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 满足下面关系：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\nabla A_0 - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}, \\ \boldsymbol{H} &= \nabla \times \boldsymbol{A}, \end{aligned} \tag{9.2}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 为矢量势，A_0 为标量势. 利用上面关系，我们可把麦克斯韦方程

$$\begin{aligned} &\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0, \\ &\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \end{aligned} \tag{9.3}$$

写成下面形式：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\boldsymbol{A} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)A_0 = 0, \tag{9.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}A_0 + \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0. \tag{9.5}$$

上面(9.4)中两式称为波动方程，(9.5)称为洛伦兹辅助条件. 在洛伦兹规范里，人们选取 $A_0 = 0$，于是(9.5)就变为(9.1). 引入 $x_4 = it$，(9.5)可写为

$$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \tag{9.6}$$

在洛伦兹变换下，上式的形式显然是不变的.

由(9.2)定义的 $\boldsymbol{A}$ 和 A_0 并不是完全确定的. 命χ为任一满足下面波动方程的解，

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \nabla^2 \chi = 0. \tag{9.7}$$

我们看到，如果把 $\boldsymbol{A}$ 和 A_0 换为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}' &= \boldsymbol{A} + \nabla\chi, \\ A_0' &= A_0 - \frac{\partial}{\partial t}\chi, \end{aligned} \tag{9.8}$$

(9.4)和(9.5)仍被满足. 变换(9.8)称为电磁场的规范变换. 前面所述的洛伦兹规范相应于选取

$$\frac{\partial}{\partial t}\chi = A_0, \tag{9.9}$$

代入(9.8)的第二式，立刻得出 $A_0' = 0$.

下面我们将给出电磁场的物理观察量. 像在前面几节所强调指出的那样，这些物理量必须是满足守恒定律的协变量. 引入 $F_{\mu\nu}$，其定义为

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \tag{9.10}$$

$F_{\mu\nu}$所满足的麦克斯韦方程可写为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_\rho} F_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\mu} F_{\nu\rho} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} F_{\rho\mu} = 0, \quad (\mu \neq \nu \neq \rho) \\ &\sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_\nu} F_{\mu\nu} = 0. \quad (\mu = 1,2,3,4) \end{aligned} \tag{9.11}$$

由定义看到 $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. 人们所熟知的能量动量密度张量可写为

$$T_{\mu\nu} = -\sum_{\gamma=1}^{4} F_{\mu\gamma} F_{\nu\gamma} + \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu} \sum_{\lambda=1}^{4}\sum_{\sigma=1}^{4} F_{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}, \tag{9.12}$$

很容易利用麦克斯韦方程(9.11)证明上式满足守恒定律：

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} T_{\mu\nu} = 0. \tag{9.13}$$

电磁场的总能量 E 和总动量 $\boldsymbol{P}$ 由下式给出：

$$\boldsymbol{E} = \int T_{44} \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int (\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2) \mathrm{d}V, \tag{9.14}$$

$$P_j = \mathrm{i}\int T_{j4} \mathrm{d}V = \int (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})_j \mathrm{d}V = \int S_j \mathrm{d}V, \tag{9.15}$$

式中积分是对整个空间的积分，

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{9.16}$$

代表坡印亭(Poynting)矢量. 因为 $F_{\mu\nu}$（即 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$）都是与规范的选择无关的量，所以由上式给出的 $T_{\mu\nu}, E, P_j$ 和 $\boldsymbol{S}$ 等物理量也都与规范的选择无关.

像在介子场和狄拉克场里一样，我们可以引入角动量密度张量

$$m_{\mu\nu\rho} = x_\mu T_{\nu\rho} - x_\nu T_{\mu\rho}, \tag{9.17}$$

利用 $T_{\mu\nu}$ 对 μ,ν 对称这个条件，我们可以证明守恒定律

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho} m_{\mu\nu\rho} = 0. \tag{9.18}$$

由 $m_{\mu\nu\rho}$ 得电磁场的总角动量的分量 M_{ij} 为

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \mathrm{i}\int (x_i T_{j4} - x_j T_{i4}) \mathrm{d}V \\ &= \int (x_i S_j - x_j S_i) \mathrm{d}V. \end{aligned} \tag{9.19}$$

与介子场及狄拉克场的情形一样，我们可以利用(9.18)式证明电磁场的总角动量 M_{ij} 是与时间无关的常数. 这就是电磁场的角动量守恒定律.

下面我们将证明上式给出的 M_{ij}，也像电子场的情况一样，包括两个部分：

$$M_{ij} = L_{ij} + S_{ij}, \tag{9.20}$$

式中 L_{ij} 代表轨道角动量，S_{ij} 代表自旋角动量. 为简单起见，我们在下面证明里将选取洛伦兹规范 $A_4 = \mathrm{i}A_0 = 0$. 由(9.19)及(9.16)得

$$M_{12} = \int [x_1(E_3 H_1 - E_1 H_3) - x_2(E_2 H_3 - E_3 H_2)] \mathrm{d}V.$$

由(1.8)得

$$\begin{aligned} M_{12} = \int \Big[&- x_1 \frac{\partial A_3}{\partial t}(\nabla_2 A_3 - \nabla_3 A_2) + x_1 \frac{\partial A_1}{\partial t}(\nabla_1 A_2 - \nabla_2 A_1) \\ &+ x_2 \frac{\partial A_2}{\partial t}(\nabla_1 A_2 - \nabla_2 A_1) - x_2 \frac{\partial A_3}{\partial t}(\nabla_3 A_1 - \nabla_1 A_3) \Big] \mathrm{d}V \\ = \int \Big\{ &- \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial A_a}{\partial t}(x_1 \nabla_2 - x_2 \nabla_1) A_a + \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial A_a}{\partial t}(x_1 \nabla_a A_2 - x_2 \nabla_a A_1) \Big\} \mathrm{d}V. \end{aligned}$$

我们可以把上式右边第二项里的 ∇_a 应用部分积分法向左移动，使之作用于 $A_a x_1$ 和 $A_a x_2$ 上. 所得出的无穷远处面积分，按照前面的考虑，可证明为零. 利用(9.1)式，我们最后得到

$$M_{12} = \int \Big\{ - \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial A_a}{\partial t}(x_1 \nabla_2 - x_2 \nabla_1) A_a - \frac{\partial A_1}{\partial t} A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial t} A_1 \Big\} \mathrm{d}V.$$

对上式中标数 1,2 进行如下的转换：1→2→3→1，我们得

$$M_{ij} = \int \Big\{ - \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial A_a}{\partial t}(x_i \nabla_j - x_j \nabla_i) A_a - \frac{\partial A_i}{\partial t} A_j + \frac{\partial A_j}{\partial t} A_i \Big\} \mathrm{d}V.$$

引入三分量的场变量

$$\psi = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{\psi} = \psi^{*\mathrm{T}} = (A_1, A_2, A_3).$$

上式又可写为

$$M_{ij} = -\mathrm{i}\int \frac{\partial \psi}{\partial t} \mathscr{L}_{ij} \psi \mathrm{d}V - \mathrm{i}\int \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \mathscr{I}_{ij} \psi \mathrm{d}V. \tag{9.21}$$

式中 $\mathscr{L}_{ij}$ 是通常的轨道角动量算符：

$$\mathscr{L}_{ij} = -\mathrm{i}\left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i}\right),$$

$\mathscr{I}_{ij}$ 由下面矩阵给出：

$$\mathscr{I}_{12} = \mathscr{I}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathscr{I}_{23} = \mathscr{I}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathscr{I}_{31} = \mathscr{I}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

上面三个矩阵代表总角动量为 1 的自旋角动量算符. 它们满足通常角动量算符所满足的对易关系. 应用部分积分法，我们又可把(9.21)写为

$$M_{ij} = \frac{\mathrm{i}}{2}\int \left\{\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}(\mathscr{L}_{ij} + \mathscr{I}_{ij})\psi - \bar{\psi}(\mathscr{L}_{ij} + \mathscr{I}_{ij})\frac{\partial \psi}{\partial t}\right\}\mathrm{d}V. \tag{9.22}$$

上式正是当 ψ 被看成几率幅时的总角动量平均值. 这一结果又一次证实了以前的论点，即对于任一物理量，在 $\hbar = 1$ 的单位里，经典场的总值正是等于薛定谔理论里的平均值. 从上面计算我们看到，电磁场是一个自旋等于 1 的场.

在对电磁场进行量子化以前，我们先把(9.4)的解展开成下面式子：

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\{a_\mu(\boldsymbol{k},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + a_\mu^+(\boldsymbol{k},t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\}, \tag{9.23}$$

$$a_\mu(\boldsymbol{k},t) = a_\mu(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}, \tag{9.24}$$

式中 $k = |\boldsymbol{k}|$，$a_4^+ = -a_4^*$，$a_i^+ = a_i^*$. 代入(9.14)得

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\int\left[\left(-\nabla A_0 - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}\right)^2 + (\nabla \times \boldsymbol{A})^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t}A_0 + \nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)^2\right]\mathrm{d}V \\ &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\cdot 2k^2\sum_{\mu=1}^{4} a_\mu^+(\boldsymbol{k},t)a_\mu(\boldsymbol{k},t). \end{aligned} \tag{9.25}$$

如果我们相应于任一前进矢量 $\boldsymbol{k}$，引入四个互相垂直的单位矢量 $e_\mu^{(\lambda)}$ ($\lambda = 1,2,3,4$). 取 $e_\mu^{(4)} = \mathrm{i}e_\mu^{(0)}$ 沿着 $x_4 = \mathrm{i}x_0$ 的方向，并且取 $e_\mu^{(3)}$ 平行于 $\boldsymbol{k}$，$e_\mu^{(1)}$ 和 $e_\mu^{(2)}$ 即代表前进矢量为 $\boldsymbol{k}$ 的矢量场的两个独立的横波的极化方向. 因为 $e_\mu^{(1)}$，$e_\mu^{(2)}$ 和 $e_\mu^{(3)}$ 都垂直于时间方向，它们都是普通空间的三个互相垂直的矢量. 命

$$a_\mu(\boldsymbol{k},t)=\sum_{\lambda=1}^{4}e_\mu^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})a_\lambda(\boldsymbol{k},t),\tag{9.26}$$

$a_\lambda(\boldsymbol{k},t)$即代表沿 $e_\mu^{(\lambda)}$ 方向的电磁场的振动. 利用(9.26)得

$$A_\mu(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\sum_{\lambda=1}^{4}e_\mu^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})[a_\lambda(\boldsymbol{k},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+a_\lambda^+(\boldsymbol{k},t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}].\tag{9.27}$$

在上面变换中,洛伦兹条件(9.5)变为

$$a_3(\boldsymbol{k},t)=a_0(\boldsymbol{k},t),\tag{9.28}$$

式中 $a_0(\boldsymbol{k},t)=-\mathrm{i}a_4(\boldsymbol{k},t)$,取上式和它的复数共轭的乘积得

$$a_3^*(\boldsymbol{k},t)a_3(\boldsymbol{k},t)=a_0^*(\boldsymbol{k},t)a_0(\boldsymbol{k},t).\tag{9.29}$$

在(9.25)中代入(9.26),我们得

$$E=\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\cdot 2k^2[a_1^*(\boldsymbol{k},t)a_1(\boldsymbol{k},t)+a_2^*(\boldsymbol{k},t)a_2(\boldsymbol{k},t)$$
$$+a_3^*(\boldsymbol{k},t)a_3(\boldsymbol{k},t)-a_0^*(\boldsymbol{k},t)a_0(\boldsymbol{k},t)].\tag{9.30}$$

由(9.29)立刻得到

$$E=\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\cdot 2k^2[a_1^*(\boldsymbol{k},t)a_1(\boldsymbol{k},t)+a_2^*(\boldsymbol{k},t)a_2(\boldsymbol{k},t)].\tag{9.31}$$

上面结果表示,在自由电磁场里,只有横场才对总能量有贡献. 由(9.30)我们看到标量场的能量是负的,而洛伦兹辅助条件(9.29)的效果是使得纵场的正能恰恰和标量场的负能抵消,这样电磁场里的能量就只是横场的能量. 这一点清楚地指出洛伦兹条件的重要性：如果电磁场只是由波动方程(9.4)来描写而不要求满足洛伦兹条件(9.5),那么由(9.30)我们看到 E 的值将可以取任意的负值. 这将导致严重的负能困难. 引人洛伦兹条件立刻消除了这个困难.

由规范变换(9.8),我们看到在不同规范里,A_0 是不同的,因此标量场的负能的值也是不同的. 这表明标量场和纵场的能量的具体数值是没有物理意义的. 在洛伦兹规范中这两种场的能量都等于零.

由于量子现象首先表现为能量的不连续性,而自由标量场和纵场在所有规范中的"能量"都不导致任何观察上的效应,而且这两种场的总能量为零,很自然的结论是这些场根本没有量子. 事实上人们也向来没有观察到过"标量光子"或"纵光子". 所以对于电磁场,我们只需要考虑横场的量子化问题.

但是前面已经指出,这样把电磁场区分为横场和纵场并不是协变的. 为着使得以后的计算更显示出协变性,我们将在形式上也对纵场和标量场进行量子化,使计算显示出协变性的优点,从而可以通过计算结果的协变性认识它的物理意义. 这一点对于后面将要讨论的重正化理论是非常重要的. 事实上也正是为了处理重正化问题人们才引人标量场和纵场的量子化.

在对标量场和纵场与横场一齐进行量子化时,我们必须把 $a_\lambda(\boldsymbol{k})(\lambda=1,2,3,4)$

看作是四个独立的场变量，而洛伦兹条件的作用则是给出这些场变量之间的关系，这样就使得独立的场变量的数目小于四个．所以为着在进行量子化时，能够把 $a_\lambda(\boldsymbol{k})$ 看作是四个独立的自由度，我们必须暂时忘却洛伦兹条件，然后在量子化以后重新引入这个条件作为态矢量 Ψ 所必须满足的条件：

$$\sum_{\mu=1}^{4}\Psi^* \frac{\partial}{\partial x_\mu}A_\mu\Psi = 0. \tag{9.32}$$

很容易看出在经典极限下，上式即导致原来的洛伦兹条件(9.6)．

我们必须这样引入对纵场和标量场的量子化，使得整个场的量子化条件在洛伦兹变换下是协变的．引入 $a_\mu(\boldsymbol{k},t)=c_\mu(\boldsymbol{k},t)/\sqrt{2k}$，(9.27)可写为

$$A_\mu = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\sum_{\lambda=1}^{4}e_\mu^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})\frac{1}{\sqrt{2k}}\left[c_\lambda(\boldsymbol{k},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+c_\lambda^+(\boldsymbol{k},t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right],$$

$$(\mu = 1,2,3,4) \tag{9.33}$$

式中

$$c_4(\boldsymbol{k},t) = \mathrm{i}c_0(\boldsymbol{k},t),\quad c_i^+(\boldsymbol{k},t) = c_i^*(\boldsymbol{k},t),$$

$$c_4^+(\boldsymbol{k},t) = -c_4^*(\boldsymbol{k},t) = \mathrm{i}c_0^*(\boldsymbol{k},t).$$

量子化条件可由下面对易关系表出：

$$[c_\lambda(\boldsymbol{k}),c_\rho^+(\boldsymbol{k}')] = \delta_{\lambda\rho}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'),\quad (\lambda,\rho = 1,2,3,4) \tag{9.34}$$

上式在洛伦兹变换下的协变性可由下面看出：由上面对易关系我们得出在海森伯表象中 $A_\mu(x)$ 所满足的对易关系为

$$[A_\mu(x),A_\nu(x')] = -\mathrm{i}\delta_{\mu\nu}D(x-x'), \tag{9.35}$$

式中

$$D(x-x') = \frac{-1}{(2\pi)^3\mathrm{i}}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\frac{1}{2k}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k,x-x')}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k,x-x')}\right] \tag{9.36}$$

为 $\Delta(x-x')$ 在质量 $\mu\to 0$ 时的极限．因为(9.35)在不同惯性坐标中保持相同的形式，所以(9.34)在不同惯性坐标中也保持相同的形式．这证明了对易关系(9.34)在洛伦兹变换下的协变性．

由(9.34)得

$$[c_i(\boldsymbol{k}),c_j^*(\boldsymbol{k}')] = \delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'),\quad (i,j = 1,2,3) \tag{9.37}$$

$$[c_0(\boldsymbol{k}),c_0^*(\boldsymbol{k}')] = -\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'). \tag{9.38}$$

我们注意到(9.38)式的右边比通常的对易关系多一个负号．如果我们按照通常做法，把 c_0 和 c_0^* 分别解释为减少和增加一个“标量光子”的算符，这将导致负几率困难：考虑一个标量光子的态

$$\Psi = c_0^*(\boldsymbol{k})\Psi_0,$$

式中 Ψ_0 代表真空的态．由(9.38)得这个态的几率为

$$\Psi^{-}\Psi = \Psi_0^{-}c_0(\boldsymbol{k})c_0^{*}(\boldsymbol{k})\Psi_0 = \Psi_0^{-}[c_0(\boldsymbol{k})c_0^{*}(\boldsymbol{k})]\Psi_0 = -\Psi_0^{+}\Psi_0.$$

因为真空态的几率$\Psi_0^{+}\Psi_0$必须大于零,上式给出一个标量光子态的几率是负的.为着估计这个负几率困难所造成的物理后果,我们现在先讨论一下洛伦兹条件(9.32)的意义.引入矢量

$$e_\mu^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[e_\mu^{(3)}(\boldsymbol{k}) + e_\mu^{(0)}(\boldsymbol{k})],$$
$$e_\mu^{(l)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[e_\mu^{(3)}(\boldsymbol{k}) - e_\mu^{(0)}(\boldsymbol{k})], \tag{9.39}$$

式中

$$e_\mu^{(0)}(\boldsymbol{k}) = +ie_\mu^{(4)}(\boldsymbol{k}), \tag{9.40}$$

这样,

$$e_\mu^{(4)}c_4(\boldsymbol{k}) = +e_\mu^{(0)}c_0(\boldsymbol{k}). \tag{9.41}$$

由(9.39)得

$$\sum_{\mu=1}^{4}e_\mu^{(l)}e_\mu^{(l)} = \sum_{\mu=1}^{4}e_\mu^{(k)}e_\mu^{(k)} = 0,$$
$$\sum_{\mu=1}^{4}e_\mu^{(l)}e_\mu^{(k)} = 1. \tag{9.42}$$

引入算符$c_k(\boldsymbol{k})$和$c_l(\boldsymbol{k})$,定义如下:

$$e_\mu^{(3)}c_3(\boldsymbol{k}) + e_\mu^{(0)}c_0(\boldsymbol{k}) = e_\mu^{(l)}c_l(\boldsymbol{k}) + e_\mu^{(k)}c_k(\boldsymbol{k}),$$

由上式得

$$c_k(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[c_3(\boldsymbol{k}) + c_0(\boldsymbol{k})],$$
$$c_l(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[c_3(\boldsymbol{k}) - c_0(\boldsymbol{k})].$$

很容易由(9.37)和(9.38)验证下面的对易关系:

$$[c_l(\boldsymbol{k}), c_k^{*}(\boldsymbol{k}')] = \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'),$$
$$[c_k(\boldsymbol{k}), c_l^{*}(\boldsymbol{k}')] = \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'), \tag{9.43}$$
$$[c_l(\boldsymbol{k}), c_l^{*}(\boldsymbol{k})] = [c_k(\boldsymbol{k}), c_k^{*}(\boldsymbol{k})] = 0.$$

我们可把洛伦兹条件(9.32)用下面的条件[①]

$$\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}A_\mu^{(-)}(x)\Psi = 0 \tag{9.44}$$

代换,$A_\mu^{(-)}(x)$为$A_\mu(x)$中包含吸收算符$c_\lambda(\boldsymbol{k})$的部分(即负频率的部分).(9.44)显

① 这个条件是首先由 S. N. Gupta 引入的,见 *Proceedings of Physical Society* (London) **63** 681 (1950).

然导致(9.32)，因为由上式立刻得到

$$\sum_{\mu=1}^{4}\Psi^{-}\frac{\partial A_{\mu}^{(-)}}{\partial x_{\mu}}=0, \tag{9.45}$$

在(9.44)式左边乘上 Ψ^{-}，再在(9.45)式右边乘上 Ψ，相加即得出(9.32).

在动量表象里，(9.44)可写为

$$c_l(\boldsymbol{k})\Psi=0, \tag{9.46}$$

如果我们像通常一样把 $c_k^*(\boldsymbol{k})$和 $c_l^*(\boldsymbol{k})$看成产生“k 光子”和“l 光子”的算符，那么由对易关系(9.43)我们看到条件(9.46)要求在电磁场里没有 k 光子，但可有任意个的 l 光子.

其次，从(9.43)的最后一式，我们看到纯粹的 k 光子的态和纯粹的 l 光子的态的几率都为零：命

$$\Psi=f(c_l^*(\boldsymbol{k}))\Psi_0,$$

代表任一纯 l 光子的态，$f(c_l^*(\boldsymbol{k}))$为任一由各种 k 值的 $c_l^*(\boldsymbol{k})$所组成的多项式. 命 $f^*(c_l^*(\boldsymbol{k}))=f_1(c_l(\boldsymbol{k}))$为 $f(c_l^*(\boldsymbol{k}))$的复数共轭，于是

$$\Psi^{+}\Psi=\Psi_0^{+}f_1(c_l(\boldsymbol{k}))f(c_l^*(\boldsymbol{k}))\Psi_0,$$

因为 $c_l(\boldsymbol{k})$和 $c_l^*(\boldsymbol{k})$是对易的，我们得

$$\Psi^{+}\Psi=\Psi_0^{+}f(c_l^*(\boldsymbol{k}))f_1(c_l(\boldsymbol{k}))\Psi_0=0.$$

因 $c_l(\boldsymbol{k})\Psi_0=0$. 同样考虑可以证明任一纯粹的 k 光子的态的几率也等于零.

为着说明 k 光子和 l 光子同时存在的态的几率可以取负值，我们只需要考虑下面的态：

$$\Psi=\{c_k^*(\boldsymbol{k})-c_l^*(\boldsymbol{k})\}\Psi_0,$$

由(9.43)得

$$\begin{aligned}\Psi^{+}\Psi&=\Psi_0^{+}\{c_k(\boldsymbol{k})-c_l(\boldsymbol{k})\}\{c_k^*(\boldsymbol{k})-c_l^*(\boldsymbol{k})\}\Psi_0\\&=\Psi_0^{+}[c_0(\boldsymbol{k}),c_0^*(\boldsymbol{k})]\Psi_0\\&=-\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k})\Psi_0^{+}\Psi_0<0.\end{aligned}$$

由于洛伦兹条件排除了 k 光子存在的态，从上面讨论，我们看到所有纵光子和标量光子的态都作为纯 l 光子的态出现，并且这些态的几率都等于零，因此人们将不可能观察到 l 光子.

必须强调指出，纵场和标量场的量子运动是根本不存在的. 我们对于这两种场在形式上进行量子化只是为了保持计算结果的协变性. 我们接受这个量子化作为一个计算方法，只是因为我们知道这样算出结果是完全相同于不对这些场进行量子化所得到的计算结果.

由(9.44)给出的洛伦兹条件只有在忽略去电磁场和电子场的相互作用时才可能被满足. 在§12 中我们将指出，当上述相互作用不被略去时，k 光子和 l 光子同

时存在的负几率的态将会在薛定谔方程的解里出现.

对于自由电磁场来讲,洛伦兹条件起着两个重要的作用:(i) 使标量场的负能量正好与纵场的正能量相抵消,从而避免了负能困难;(ii) 使标量场所贡献的负几率正好与纵场所贡献的正几率相抵消,从而避免了负几率困难.前面所述的 l 光子态的几率为零,正是这两种几率互相抵消的结果.

第三章　场的相互作用和正则描述

§10　电磁相互作用的规范不变性和正则描述

从前章所讨论的自由场的理论，我们看到各种场的波函数(或场变量)如$\psi(x)$，$\varphi(x)$和$A_\mu(x)$等本身都不代表可观察的物理量. 对于电磁场$A_\mu(x)$，我们可以引入变换

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\chi(x), \tag{10.1}$$

式中$\chi(x)$是下列波动方程的任一个解：

$$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\chi(x) = 0. \tag{10.2}$$

这个变换对于所有的电磁场的物理观察量不产生任何影响. 变换(10.1)一般称为第一种规范变换. 对于介子场和狄拉克场的波函数$\varphi(x)$和$\psi(x)$，我们也可以引入另一变换，即：

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = \varphi(x)e^{i\alpha(x)}, \tag{10.3}$$

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \psi(x)e^{i\beta(x)}, \tag{10.4}$$

式中$\alpha(x)$和$\beta(x)$是任意的函数. 这第二个变换即称为第二种规范变换. 很容易看出，这个变换对于场的所有物理观察量也不产生任何改变.

当电磁场和狄拉克场或介子场之间存在着相互作用时，$\chi(x)$和$\alpha(x)$或$\beta(x)$并不是互相独立的函数. 为着找出$\chi(x)$和$\beta(x)$间的关系，我们写下有电磁场存在时的狄拉克方程[①]，

$$\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right)\psi + m\psi = 0. \tag{10.5}$$

上式是由在自由场的狄拉克方程中引入变换

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \to \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu \tag{10.6}$$

得出. 利用这个变换我们可以得出电磁场对任一带电粒子的场的作用. 现在我们要求规范变换(10.1)和(10.4)在电磁场和狄拉克场之间存在着相互作用的情形下，

---

① 对于电子，e值为负.

对于所有物理观察量也不产生任何影响.为着满足这个要求,(10.5)必须在规范变换下,保持不变的形式.即在变换后,(10.5)应为

$$\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\mathrm{i}eA'_\mu\right)\psi'+m\psi'=0, \tag{10.7}$$

也就是说,当我们在上式中代入变换(10.1)和(10.4),应当重新给出(10.5).代入(10.1)和(10.4)后上式变为

$$\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\mathrm{i}eA_\mu+\mathrm{i}e\frac{\partial}{\partial x_\mu}\chi\right)\psi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(x)}+m\psi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(x)}=0.$$

我们立刻看到,为着使上式和(10.5)完全相同,必需的条件为

$$\beta(x)=-e\chi(x).$$

所以对狄拉克波函数的第二种规范变换应为

$$\psi(x)\rightarrow\psi'(x)=\psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\chi(x)}. \tag{10.8}$$

同样的考虑得出对克莱因-戈尔登波函数$\varphi(x)$的规范变换为

$$\varphi(x)\rightarrow\varphi'(x)=\varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\chi(x)}. \tag{10.9}$$

描写和电磁场相互作用的带电介子场的克莱因-戈尔登方程为

$$\sum_{\mu=1}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\mathrm{i}eA_\mu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\mathrm{i}eA_\mu\right)\varphi-\mu^2\varphi=0, \tag{10.10}$$

它在变换(10.1)和(10.9)下,保持着不变的形式.

由(10.6)式引入的带电粒子的场和电磁场的相互作用并不是唯一可能的相互作用的形式.我们还可以引入通过狄拉克场的自旋和电磁场的直接作用.在这个情形下的狄拉克方程可写为

$$\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial \chi_\mu}-\mathrm{i}eA_\mu\right)\psi+\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\kappa\gamma_\mu\gamma_\nu F_{\mu\nu}\psi+m\psi=0. \tag{10.11}$$

当μ,ν都取空间标数时,上式的第二项可写为

$$\mathrm{i}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\kappa\sigma_{ij}F_{ij}\psi=2\mathrm{i}\sum_{i=1}^{3}\kappa\sigma_i H_i\psi, \tag{10.12}$$

式中H_i代表磁场强度的分量,σ_i是由(7.48)给出的描写狄拉克粒子自旋的四行四列矩阵.所以,(10.12)代表狄拉克场的自旋和电磁场强度$F_{\mu\nu}$直接作用的项.这种作用一般称为泡利作用,κ为泡利作用常数.这个作用不是由变换(10.6)给出,并且对于中性的介子场和中性的狄拉克场($e=0$)也是可能存在的.

为着系统地考察各种场的相互作用在不同变换下的不变性,引入正则描述方式是方便的.在这个描述里,对于相互作用中的场,我们可以引入一个拉氏函数密度$\mathscr{L}(x)$.在时空的任一点x_μ,这个函数是由参加作用的各种场的波函数和它们在x点的对x_μ的一级微商决定的.当我们考虑电子场和电磁场的相互作用时,$\mathscr{L}$可写为

$$\mathscr{L}(x)=\mathscr{L}\Big(\psi(x),\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu},\bar{\psi}(x),\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu},A_\mu(x),F_{\mu\nu}(x)\Big),\tag{10.13}$$

上式又可写为

$$\mathscr{L}(x)=\mathscr{L}\Big(\phi_s(x),\frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi_s(x)\Big)\quad(s=1,2,3,4,\cdots),\tag{10.14}$$

其中 $\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4,\cdots$ 分别代表 $\psi(x),\bar{\psi}(x),A_1(x),A_2(x),\cdots$. 取 $\mathscr{L}(x)$ 对整个空间的积分，并对时间取从 $x_4'=\mathrm{i}t'$ 到 $x_4''=\mathrm{i}t''$ 的积分：

$$S(t'',t')=-\mathrm{i}\int_{x_4'}^{x_4''}\mathrm{d}^4x\mathscr{L}(x).\tag{10.15}$$

上式称为这个系统的作用(action)函数或作用积分，它在任意洛伦兹坐标变换下都是一个不变量. 当我们给 $\phi_s(x)$ 以一个任意小的改变时，

$$\begin{aligned}&\phi_s(x)\to\phi_s(x)+\delta\phi_s(x),\\&\delta\phi_s(x)=0,\quad 当\ t=t'\ 和\ t=t'',\end{aligned}\tag{10.16}$$

我们要求 $S(t'',t')$ 的变化为零，即

$$\delta S(t'',t')=0.\tag{10.17}$$

很容易证明上式导致拉氏方程为

$$\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{s\mu}}\Big)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_s}=0,\tag{10.18}$$

式中

$$\phi_{s\mu}\equiv\frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi_s.\tag{10.19}$$

按照运动的“最小作用”原理，(10.18)应该正是场所满足的运动方程.

相应于自由电子场和自由电磁场的总拉氏函数密度可由下式给出

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{电子}+\mathscr{L}_{电磁},\tag{10.20}$$

$$\mathscr{L}_{电子}=-\frac{1}{2}\bar{\psi}\Big(\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+m\Big)\psi+\frac{1}{2}\Big(\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\mu-\bar{\psi}m\Big)\psi,\tag{10.21}$$

$$\mathscr{L}_{电磁}=-\frac{1}{4}\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\Big(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\Big)\Big(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\Big).\tag{10.22}$$

很容易验证狄拉克方程(6.1)，(6.12)和麦克斯韦波动方程(1.1)正是下面三个拉氏方程：

$$\begin{aligned}&\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\bar{\psi}_\mu}\Big)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\bar{\psi}}=0,\\&\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi_\mu}\Big)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi}=0,\\&\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_{\mu\nu}}\Big)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_\mu}=0,\end{aligned}\tag{10.23}$$

式中

$$\bar{\psi}_\mu=\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu},\quad \psi_\mu=\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu},\quad A_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}.$$

如果我们参照变换(10.6)，在 $\mathscr{L}$ 中引人变换

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi&\to\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\mathrm{i}eA_\mu\right)\psi,\\ \frac{\partial}{\partial x_\mu}\bar{\psi}&\to\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\mathrm{i}eA_\mu\right)\bar{\psi};\end{aligned}\tag{10.24}$$

于是(10.21)变为

$$\mathscr{L}_{电子}+\mathscr{L}_{相互}=-\frac{1}{2}\bar{\psi}\left[\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\mathrm{i}eA_\mu\right)+m\right]\psi$$

$$+\frac{1}{2}\left[\sum_{\mu=1}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\mathrm{i}eA_\mu\right)\bar{\psi}\gamma_\mu-m\bar{\psi}\right]\psi.\tag{10.25}$$

以(10.25)代替(10.21)代入(10.20)和(10.23)，我们立刻得到(10.5)和下面两式：

$$\sum_{\mu=1}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\mathrm{i}eA_\mu\right)\bar{\psi}\gamma_\mu-m\bar{\psi}=0,\tag{10.26}$$

$$\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}A_\mu=-\mathrm{i}e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi.\tag{10.27}$$

(10.26)正是(10.5)式的厄米共轭，(10.27)式的右边正是电子场的电流. 所以(10.27)又可写为

$$\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}A_\mu=-j_\mu.\tag{10.28}$$

由(10.25)，我们可把总拉氏函数密度写成下面形式：

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{电子}+\mathscr{L}_{电磁}+\mathscr{L}_{相互},\tag{10.29}$$

式中 $\mathscr{L}_{电子}$ 和 $\mathscr{L}_{电磁}$ 代表自由电子场和自由电磁场的拉氏函数密度(10.21)和(10.22)，$\mathscr{L}_{相互}$ 为

$$\mathscr{L}_{相互}=\sum_{\mu=1}^{4}\mathrm{i}e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu,\tag{10.30}$$

或

$$\mathscr{L}_{相互}=\sum_{\mu=1}^{4}j_\mu A_\mu.\tag{10.31}$$

(10.24)和(10.31)可看作是 $\mathrm{i}e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ 应解释为电流四维矢量密度的一个独立的论证. 在§7中我们是从守恒定律(7.32)论证它代表电流四维矢量密度的.

前面所述泡利作用可以通过在(10.29)式的右边加上一项新的相互作用拉氏函数 $\mathscr{L}'_{相互}$ 得出. $\mathscr{L}'_{相互}$ 为

$$\mathcal{L}'_{相互} = \kappa \sum_{\mu\nu} \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_\nu \psi F_{\mu\nu}. \tag{10.32}$$

我们立刻看出(10.29)式右边诸项和(10.32)式在洛伦兹变换和规范变换下都是不变的，由于这个不变性的要求，可能存在的相互作用的形式就受到很大的限制。现在在实验上尚没有迹象指出作用(10.32)是必须存在的。人们由此引申得出一个所谓"电磁现象的最小相互作用原理"。按照这个原理，所有电磁作用都必须通过引入变换(10.6)得出。

同样的考虑可以得出带电介子场和电磁场的相互作用。自由介子场的拉氏函数密度可写为

$$\mathcal{L}_{介子} = -\left\{\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} + \mu^2 \varphi^* \varphi\right\}. \tag{10.33}$$

引入变换

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu}\varphi &\to \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mathrm{i}eA_\mu\right)\varphi, \\ \frac{\partial}{\partial x_\mu}\varphi^* &\to \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \mathrm{i}eA_\mu\right)\varphi^*, \end{aligned} \tag{10.34}$$

得

$$\mathcal{L}_{介子} + \mathcal{L}_{相互} = -\left\{\sum_{\mu=1}^{4} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \mathrm{i}eA_\mu\right)\varphi^* \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mathrm{i}eA_\mu\right)\varphi + \mu^2 \varphi^* \varphi\right\}. \tag{10.35}$$

由(10.22)和上式我们得到介子场和电磁场的总拉氏函数密度为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{电磁} + \mathcal{L}_{介子} + \mathcal{L}_{相互}, \tag{10.36}$$

式中 $\mathcal{L}_{电磁}$ 和 $\mathcal{L}_{介子}$ 由(10.22)和(10.33)给出，$\mathcal{L}_{相互}$ 为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{相互} &= \sum_{\mu=1}^{4} \mathrm{i}e\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu}\varphi - \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right)A_\mu - \sum_{\mu=1}^{4} e^2 \varphi^* \varphi A_\mu A_\mu \\ &= \sum_{\mu=1}^{4} j_\mu A_\mu + \sum_{\mu=1}^{4} e^2 \varphi^* \varphi A_\mu A_\mu, \end{aligned} \tag{10.37}$$

式中

$$j_\mu = \mathrm{i}e\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu}\varphi - \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right) - 2e^2 \varphi^* \varphi A_\mu. \tag{10.38}$$

当 e^2 或 A_μ 很小可以略去时，上式变为

$$j_\mu = \mathrm{i}e\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu}\varphi - \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right), \tag{10.39}$$

这正是(4.7)式。(10.38)右边的最后一项代表由于电磁场的作用而产生的诱导电流和电荷。很容易验证，由(10.36)所给出的拉氏方程为

$$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\mu}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_\mu}=0. \tag{10.40}$$

这正是(10.10)和(10.28)两式，后一式中的 j_μ 由(10.38)给出.

当介子场满足(10.10)式时，很容易证实(10.38)式(而不是(10.39)式)所给出的 j_μ 满足电荷守恒条件，

$$\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}=0.$$

但当狄拉克场由(10.5)描写时，满足上式的 j_μ 仍由没有电磁作用情况下的(7.31)式给出.

§11 量子场论的正则形式

作为下章的准备，下面将进一步讨论由(10.15)给出的作用积分 S 的性质. 当 $\mathscr{L}$ 作为 $\phi_s(x)$ 和 $\partial\phi_s(x)/\partial x_\mu$ 的函数已经确定时，除积分的上下限 t'' 和 t' 的改变导致 S 的改变外，$\phi_s(x)$ 的改变也导致 S 的改变. 我们得

$$\begin{aligned}\delta S&=\int_{t'+\delta t'}^{t''+\delta t''}\mathscr{L}(\phi_s',\phi_{s\mu}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\mathrm{d}t-\int_{t'}^{t''}\mathscr{L}(\phi_s,\phi_{s\mu})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\mathrm{d}t\\&=\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}[\mathscr{L}\delta t]_{t=t'}^{t=t''}+\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\mathrm{d}t\sum_s\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_s}\delta\phi_s+\sum_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{s\mu}}\delta\phi_{s\mu}\right],\end{aligned} \tag{11.1}$$

式中 $\delta\phi_s$ 和 $\phi_{s\mu}$ 由(10.16)和(10.19)式给出. 因为,

$$\delta\phi_{s\mu}=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi_s'(x)-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi_s(x)=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\phi_s(x), \tag{11.2}$$

我们得

$$\begin{aligned}\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\mathrm{d}t\sum_s\sum_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{s\mu}}\delta\phi_{s\mu}&=\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\mathrm{d}t\sum_s\sum_\mu\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{s\mu}}\delta\phi_s\right)-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{s\mu}}\right)\delta\phi_s\right]\\&=\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\sum_s\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{s4}}\delta\phi_s\Big|_{t'}^{t''}-\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\mathrm{d}t\sum_s\sum_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{s\mu}}\right)\delta\phi_s.\end{aligned}$$

于是(11.1)式变为

$$\begin{aligned}\delta S=&\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\Big[\mathscr{L}(\boldsymbol{r},t'')\delta t''+\sum_s\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{s4}}\right)_{t=t''}\delta\phi_s(\boldsymbol{r},t'')\\&-\mathscr{L}(\boldsymbol{r},t')\delta t'-\sum_s\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{s4}}\right)_{t=t'}\delta\phi_s(\boldsymbol{r},t')\Big]\\&-\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\mathrm{d}t\sum_s\left[\sum_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{s\mu}}\right)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_s}\right]\delta\varphi_s.\end{aligned} \tag{11.3}$$

假定 $\phi_s(x)$ 满足相应的波动方程，即(10.18)式，于是上式最后一项为零.

引入 $\bar{\delta}\phi_s$ 的定义为

$$\bar{\delta}\phi_s = \phi'_s(\boldsymbol{r},t+\delta t) - \phi_s(\boldsymbol{r},t)$$
$$= \delta\phi_s + \frac{\partial\phi_s}{\partial t}\delta t = \delta\phi_s + \phi_{st}\delta t, \tag{11.4}$$

代入(11.3)，得

$$\delta S = \int d^3r\left[-\mathscr{H}(\boldsymbol{r},t'')\delta t'' + \sum_s\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{st}}\right)_{t=t''}\bar{\delta}\phi_s(\boldsymbol{r},t'')\right.$$
$$\left.+\mathscr{H}(\boldsymbol{r},t')\delta t' - \sum_s\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{st}}\right)_{t=t'}\bar{\delta}\phi_s(\boldsymbol{r},t')\right], \tag{11.5}$$

式中

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{r},t) = -\mathscr{L}(\boldsymbol{r},t) + \sum_s\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{st}}\phi_{st}(\boldsymbol{r},t) \tag{11.6}$$

为哈密顿量密度，$\bar{\delta}\phi_s$ 是当 δt 是任意的值时 ϕ_s 的改变. $\bar{\delta}\phi_s$ 应看作是一个任意的但数值很小的函数. $\delta\phi_s$ 只是 $\delta t=0$ 时 ϕ_s 的改变. 从(11.5)我们看到 S 可写为

$$S = S(t'',\phi_s(t'');t',\phi_s(t')), \tag{11.7}$$

式中 $t'',t',\phi_s(t''),\phi_s(t'),s=1,2,\cdots$都是独立的变数. 我们得($t=t''$)

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\int d^3r\mathscr{H}(\boldsymbol{r},t),$$
$$\frac{\delta S}{\delta\phi_s} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{st}}. \tag{11.8}$$

引入总哈密顿量 H 和正则动量 $\pi_s(\boldsymbol{r},t)$，即

$$H = \int d^3r\mathscr{H}(\boldsymbol{r},t), \tag{11.9}$$

$$\pi_s(\boldsymbol{r},t) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{st}}. \tag{11.10}$$

上面结果可写为

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H,$$
$$\frac{\delta S}{\delta\phi_s} = \pi_s. \tag{11.11}$$

由(11.6)给出的 $\mathscr{H}$ 显然是由下式给出的 $T_{\mu\nu}$ 的 $\mu=\nu=4$ 分量：

$$T_{\mu\nu} = \sum_s\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{s\mu}}\phi_{s\nu} - \delta_{\mu\nu}\mathscr{L}. \tag{11.12}$$

不难由运动方程(10.18)证明上式满足能量动量密度守恒定律，即

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \tag{11.13}$$

以上是对相互作用场的经典的正则描述. $\phi_s(s=1,2,3,\cdots)$代表介子场的场变量 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\cdots$，狄拉克场的场变量 $\psi,\bar{\psi}$ 和电磁场的四度势 A_μ 等.

由于 $\mathscr{L}$ 是 ϕ_s 和 $\phi_{s\mu}$ 的函数，我们得

$$\delta\mathscr{L}=\sum_s\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_s}\delta\phi_s+\sum_{s,\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{s\mu}}\delta\phi_{s\mu}. \tag{11.14}$$

由(11.6)和(11.10)式，我们立刻得到

$$\delta\mathscr{H}=-\sum_s\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_s}\delta\phi_s-\sum_{s,\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{s\mu}}\delta\phi_{s\mu}+\sum_s\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{st}}\delta\phi_{st}+\sum_s\phi_{st}\delta\pi_s. \tag{11.15}$$

上式右边第三项和第二项中 $\mu=4$ 的项

$$\sum_s\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{st}}\delta\phi_{st}=\sum_s\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{st}}\delta\phi_{st},$$

互相抵消，于是(11.15)可写为

$$\delta\mathscr{H}=-\sum_s\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_s}\delta\phi_s-\sum_{i=1}^{3}\sum_s\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{si}}\delta\phi_{si}+\sum_s\phi_{st}\delta\pi_s.$$

上式表明 $\mathscr{H}$ 只是 $\phi_s,\phi_{si}(i=1,2,3)$ 和 π_s 的函数，即

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}(\phi_s,\phi_{si},\pi_s). \tag{11.16}$$

于是(11.11)可写为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial S}{\partial t}+\int d^3r\mathscr{H}(\phi_s,\phi_{si},\pi_s)=0,\\&\frac{\delta S}{\delta\phi_s}=\pi_s.\end{aligned} \tag{11.16a}$$

在上两式中消去 π_s，就得

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\int d^3r\mathscr{H}(\phi_s(r),\nabla_i\phi_s(r),\delta S/\delta\phi_s(r))=0. \tag{11.17}$$

这正是经典力学里的哈密顿-雅可比(Hamilton-Jacobi)方程.(11.17)又可写成

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H[\phi_s(r),\nabla_i\phi_s(r),\delta S/\delta\phi_s(r)]=0, \tag{11.18}$$

式中方括号表示 H 是 $\phi_s(r),\nabla_i\phi_s(r)$ 等的函数对 r 的积分.

上面结果指出由经典理论过渡到量子理论的又一个方式：在(11.18)式中代入

$$\Psi=e^{iS}, \tag{11.19}$$

立刻给出下面的薛定谔方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi=H\left[\phi_s(r),\nabla_i\phi_s(r),-i\frac{\delta}{\delta\phi_s(r)}\right]\Psi. \tag{11.20}$$

这是薛定谔提出的量子化的最原始的方式.这个量子化主要的效果是把经典的哈密顿量 H 通过下面的代换，

$$\pi_s(r)=-i\frac{\delta}{\delta\phi_s(r)}, \tag{11.21}$$

变成一个作用于 Ψ 的算符.上述量子化方式也可由下面的对易关系表出：

$$[\pi_s(\boldsymbol{r}),\phi_n(\boldsymbol{r}')]=-\mathrm{i}\delta_{sn}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\tag{11.22}$$

因为(11.21)正是(11.22)的一个表象.

很容易证实(11.22)正是我们在前面在处理自由介子场和自由电磁场时所引入的对易关系.对于自由中性介子场,

$$\pi(\boldsymbol{r})=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_t}=\frac{\partial\varphi^*(\boldsymbol{r})}{\partial t},\tag{11.23}$$

由(5.22)给出的自由介子场的对易关系为

$$[\varphi(\boldsymbol{r},t),\varphi(\boldsymbol{r}',t')]=-\mathrm{i}\Delta(x-x'),$$

将两边对 t 微分得

$$\left[\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t},\varphi(\boldsymbol{r}',t')\right]=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Delta(x-x').$$

命 $t=t'$,再过渡到薛定谔表象,并代入(11.23)得

$$[\pi(\boldsymbol{r}),\varphi(\boldsymbol{r}')]=-\mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\tag{11.24}$$

在写出上式时,我们曾利用(8.35)的第一式.上式正是只有一种场时的情况下的(11.22)式,其次对于自由电磁场,由(11.22)得(取洛伦兹规范,即 $A_4=0$)

$$\pi_i(\boldsymbol{r})=\frac{\partial A_i(\boldsymbol{r})}{\partial t}.\tag{11.25}$$

由(9.35)给出的自由电磁场的对易关系为

$$[A_i(\boldsymbol{r},t),A_j(\boldsymbol{r},t)]=-\mathrm{i}\delta_{ij}D(x-x').$$

两边对 t 微分,得

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}A_i(\boldsymbol{r},t),A_j(\boldsymbol{r}',t')\right]=-\mathrm{i}\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial t}D(x-x').$$

和上面一样,命 $t=t'$,过渡到薛定谔表象,再代入(11.25),并且利用(9.36)式,我们得

$$[\pi_i(\boldsymbol{r}),A_j(\boldsymbol{r}')]=-\mathrm{i}\delta_{ij}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\quad(i,j=1,2,3)\tag{11.26}$$

这也正是(11.22)式.

从上面结果我们看到,如果按照薛定谔原来的方式进行量子化,所得结果将自然地满足玻色统计.这和我们在第一章中把自由场分解成简谐振动然后再按照薛定谔理论进行量子化时的情形一样.

对于满足费米统计的场,量子化条件(11.22)必须改换为

$$\begin{gathered}[\pi(\boldsymbol{r}),\psi(\boldsymbol{r}')]_+=[\pi^*(\boldsymbol{r}),\psi^*(\boldsymbol{r}')]_+=-\mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\\ \pi(\boldsymbol{r})=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot\psi_t(\boldsymbol{r})}=\mathrm{i}\psi^*(\boldsymbol{r}),\quad\pi^*(\boldsymbol{r})=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot\psi_t^*(\boldsymbol{r})}=-\mathrm{i}\psi(\boldsymbol{r}).\end{gathered}\tag{11.27}$$

用和前面相同的计算很容易证实上式和以前对自由狄拉克场所引入的对易关系是一致的.我们将不在这里给出这个计算.有兴趣的读者可以自己用计算证实这一点.注意反对易关系(11.27)式只对于同一个场的场变量之间才是有意义的.对于

两个不同的费米场 s 和 n 我们只可能有通常的对易关系如

$$[\pi_s(\boldsymbol{r}),\phi_n(\boldsymbol{r})]=0. \quad (s\neq n)$$

对于费米场,对易关系(11.27)不可能导致关系(11.21),但也给出一个类似的关系.我们注意到 $\delta\psi(\boldsymbol{r})$ 作为 $\psi(\boldsymbol{r})$ 的任意的改变,可以看作是和 $\psi(\boldsymbol{r})$ 以及 $\bar{\psi}(\boldsymbol{r})$ 反对易的.再利用(11.27)我们得

$$\begin{aligned}
&[\delta\psi(\boldsymbol{r})\pi(\boldsymbol{r}),\psi(\boldsymbol{r}')]=-\mathrm{i}\delta\psi(\boldsymbol{r})\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\\
&[\delta\psi^*(\boldsymbol{r})\pi^*(\boldsymbol{r}),\psi^*(\boldsymbol{r}')]=-\mathrm{i}\delta\psi^*(\boldsymbol{r})\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\\
&[\delta\psi(\boldsymbol{r})\pi(\boldsymbol{r}),\psi^*(\boldsymbol{r}')]=0,\\
&[\delta\psi^*(\boldsymbol{r})\pi^*(\boldsymbol{r}),\psi(\boldsymbol{r}')]=0.
\end{aligned} \tag{11.28}$$

满足上面对易关系的解可取为

$$\mathrm{i}\delta\psi(\boldsymbol{r})\pi(\boldsymbol{r})=\delta\psi(\boldsymbol{r})\frac{\delta}{\delta\psi(\boldsymbol{r})}, \tag{11.29}$$

$$\mathrm{i}\delta\psi^*(\boldsymbol{r})\pi^*(\boldsymbol{r})=\delta\psi^*(\boldsymbol{r})\frac{\delta}{\delta\psi^*(\boldsymbol{r})}. \tag{11.30}$$

当这些算符作用于任一 $\psi(\boldsymbol{r})$ 和 $\psi^*(\boldsymbol{r})$ 的乘积时,它满足通常微分算符所满足的分配和对易规则.当(11.29)作用于乘积某一因子 $\psi(\boldsymbol{r}')$,它把这个因子换成 $\delta\psi(\boldsymbol{r})\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$.同样当(11.30)作用于因子 $\psi^*(\boldsymbol{r}')$,它把这个因子换成 $\delta\psi^*(\boldsymbol{r})\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$.这样,当 $\psi(\boldsymbol{r})$ 改变为 $\psi(\boldsymbol{r})+\delta\psi(\boldsymbol{r})$ 时,态矢量 Ψ 所产生的改变为

$$\delta\Psi=\int\delta\psi(\boldsymbol{r})\frac{\delta}{\delta\psi(\boldsymbol{r})}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\Psi=\mathrm{i}\int\delta\psi(\boldsymbol{r})\pi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\Psi. \tag{11.31}$$

恢复到本节所引入的符号 $\phi_s(\boldsymbol{r})$,上式可写为

$$\delta\Psi=\mathrm{i}\int\sum_s\delta\phi_s(\boldsymbol{r})\pi_s(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\Psi. \tag{11.32}$$

(11.32)中的 ϕ_s 显然可以包括玻色统计的场.

由(11.20)和(11.32)两式,我们立刻得到当 t 和 $\phi_s(\boldsymbol{r})$ 独立地改变时

$$\delta\Psi=-\mathrm{i}\left\{H\delta t-\sum_s\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\delta\phi_s(\boldsymbol{r})\pi_s(\boldsymbol{r})\right\}\Psi,$$

或

$$\delta\Psi=\mathrm{i}\delta S\cdot\Psi.$$

§12 在相互作用存在时对电磁场纵场和标量场的处理

我们现在将考虑相互作用的电子场和电磁场的量子理论.由(10.29),(10.21),(10.22)和(10.30)并利用关系(11.12),得出这个系统的哈密顿量密度为

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}_{电子}+\mathscr{H}_{电磁}+\mathscr{H}_{相互}, \tag{12.1}$$

式中 $\mathscr{H}_{电子}$ 和 $\mathscr{H}_{电磁}$ 代表自由电子场和自由电磁场的哈密顿量密度,

$$\mathscr{H}_{相互} = -\mathscr{L}_{相互} = -\sum_{\mu=1}^{4} \mathrm{i}e\bar{\psi}\gamma_\mu \psi A_\mu, \tag{12.2}$$

$\bar{\psi}, \psi, A_\mu$ 是§8和§9中给出的算符，在薛定谔表象里它们可写为：

$$\psi(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{s=1}^{2}\int \mathrm{d}^3 p \sqrt{\frac{m}{p_0}}\{a_s(p)u_s(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot r} + b_s^*(p)v_s(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot r}\}, \tag{12.3}$$

$$\bar{\psi}(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{s=1}^{2}\int \mathrm{d}^3 p \sqrt{\frac{m}{p_0}}\{a_s^*(p)\bar{u}_s(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot r} + b_s(p)\bar{v}_s(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot r}\}, \tag{12.4}$$

$$A_\mu(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\lambda=1}^{4}\int \mathrm{d}^3 k \frac{1}{\sqrt{2k}} e_\mu^{(\lambda)}(k)[c_\lambda(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot r} + c_\lambda^*(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot r}]. \tag{12.5}$$

在上式中为了避免不同场量符号上的混淆，我们已把电子的动量改为 p.

这个系统的薛定谔方程为

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H\Psi, \tag{12.6}$$

式中

$$H = \int \mathrm{d}^3 r \mathscr{H} = H_{电子} + H_{电磁} + H_{相互}, \tag{12.7}$$

$H_{电子}$ 和 $H_{电磁}$ 是自由场的总哈密顿量算符，$H_{相互}$ 由下式给出

$$H_{相互} = \int \mathrm{d}^3 r \mathscr{H}_{相互}. \tag{12.8}$$

(12.2)又可写为

$$\mathscr{H}_{相互} = -\sum_{\mu=1}^{4} j_\mu A_\mu^{(t)} - \sum_{\mu=1}^{4} j_\mu A_\mu^{(l)} - \sum_{\mu=1}^{4} j_\mu A_\mu^{(k)}. \tag{12.9}$$

式中

$$A_\mu^{(t)}(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\lambda=1,2}\int \frac{\mathrm{d}^3 k}{\sqrt{2k}} e_\mu^{(\lambda)}[c_\lambda(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot r} + c_\lambda^*(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot r}], \tag{12.10}$$

$$A_\mu^{(l)}(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{\mathrm{d}^3 k}{\sqrt{2k}} e_\mu^{(l)}[c_l(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot r} + c_l^*(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot r}], \tag{12.11}$$

$$A_\mu^{(k)}(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{\mathrm{d}^3 k}{\sqrt{2k}} e_\mu^{(k)}[c_k(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot r} + c_k^*(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot r}]. \tag{12.12}$$

即 $A_\mu^{(t)}$ 代表横场的算符. $A_\mu^{(l)}$ 和 $A_\mu^{(k)}$ 代表 l 光子和 k 光子的场的算符. 从上面式子我们看到，$\mathscr{H}_{相互}$ 包含 k 光子和 l 光子的放出算符，因此有必要具体考察一下§9中所述洛伦兹条件

$$c_l(k)\Psi = 0 \tag{12.13}$$

是否还被满足[①]. 按照条件(12.13)，在空间中除掉横光子以外，还可以有 l 光子存

① 这个问题曾由 K. Bleuler 处理过，见 *Helvelica Physica Acta* **23** 567 (1950). Bleuler 在处理中推广了(12.13)式. 本节的推导没有引入这个推广.

在. 现在我们很容易证明

$$[H, c_l(\boldsymbol{k})] \neq 0, \tag{12.14}$$

这意味着任何 H 的本征态都不可能同时是 $c_l(\boldsymbol{k})$ 的本征态，因此(12.13)不可能被满足，因为这一条件要求 Ψ 是 $c_l(\boldsymbol{k})$ 的本征值为零的本征态. 为着证明上式我们只需要证明

$$\left[\int \mathrm{d}^3 r \sum_{\mu=1}^{4} j_\mu A_\mu^{(k)}, c_l(\boldsymbol{k})\right] \neq 0. \tag{12.15}$$

因为 H 中其他诸项都与 $c_l(\boldsymbol{k})$ 对易. 利用对易关系(9.43)的第一式并代入(12.10)，我们立刻得到

$$\left[\int \mathrm{d}^3 r \sum_{\mu=1}^{4} j_\mu A_\mu^{(k)}, c_l(\boldsymbol{k})\right] = \frac{-1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}^3 r j_\mu(\boldsymbol{r}) \cdot e_\mu^{(k)} \frac{1}{\sqrt{2k}} \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}.$$

这证明了(12.15)和(12.14).

下面我们将证明：当电磁场中有电荷存在时，k 光子和 l 光子的效应可由电荷间的库仑场来代替. 引入变换

$$\Psi = \mathrm{e}^{-iH_0 t} \Psi_I, \tag{12.16}$$

式中

$$H_0 = H_{电子} + H_{电磁}.$$

当相互作用不存在时，Ψ_I 正是海森伯表象. 当相互作用存在时，Ψ_I 称为"相互作用表象". 所以，相互作用表象是介于海森伯表象和薛定谔表象之间的一个表象. 将(12.16)代入(12.6)，并在结果上从左边乘以 $\mathrm{e}^{iH_0 t}$，我们得 Ψ_I 所满足的方程为

$$\begin{aligned} &\mathrm{i} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_I = H_I \Psi_I \\ &H_I = \mathrm{e}^{iH_0 t} H_{相互} \mathrm{e}^{-iH_0 t}. \end{aligned} \tag{12.17}$$

我们看到 H_I 是由(12.8)和(12.2)给出的相同的函数，只不过 $\psi, \bar{\psi}$ 和 A_μ 现在由下式给出：

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s=1}^{2} \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{p} \sqrt{\frac{m}{p_0}} \{a_s(\boldsymbol{p}) u_s(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{i(px)} + b_s^*(\boldsymbol{p}) v_s(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{-i(px)}\}, \tag{12.18}$$

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s=1}^{2} \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{p} \sqrt{\frac{m}{p_0}} \{a_s^*(\boldsymbol{p}) \bar{u}_s(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{-i(px)} + b_s(\boldsymbol{p}) \bar{v}_s(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{i(px)}\}, \tag{12.19}$$

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=1}^{4} \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{k} \frac{1}{\sqrt{2k}} e_\mu^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}) [c_\lambda(\boldsymbol{k}) \mathrm{e}^{i(kx)} + c_\lambda^*(\boldsymbol{k}) \mathrm{e}^{-i(kx)}]. \tag{12.20}$$

式中

$$(kx)=\sum_{\mu=1}^{4}k_\mu x_\mu,\quad (px)=\sum_{\mu=1}^{4}p_\mu x_\mu.$$

(12.18)　(12.20)正是这些算符在自由场的海森伯表象里的表达式.

下面我们将进一步引入变换

$$\Psi_I=e^{i\chi}\Psi_J,\tag{12.21}$$

$$\chi=\sum_{\mu=1}^{4}\int_{-\infty}^{t}j_\mu(x')A_\mu^{(k)}(x')d^4x'.\tag{12.22}$$

代入(12.17),并从等式的左边乘以 $e^{-i\chi}$,我们得

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi_J=-e^{-i\chi}\int d^3r\left\{\sum_{\mu=1}^{4}j_\mu A_\mu^{(t)}+\sum_{\mu=1}^{4}j_\mu A_\mu^{(l)}\right\}e^{i\chi}\Psi_J.\tag{12.23}$$

在上式中我们已消去在两边出现的含 $j_\mu A_\mu^{(k)}$ 的相同的项.

引入

$$B(x)=\frac{-i}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3k}{2k^{3/2}}[c_k(\boldsymbol{k})e^{i(kx)}-c_k^*(\boldsymbol{k})e^{-i(kx)}],\tag{12.24}$$

很容易证实

$$A_\mu^{(k)}(x)=\frac{\partial}{\partial x_\mu}B(x).$$

于是(12.22)可写为

$$\chi=\sum_{\mu=1}^{4}\int_{-\infty}^{t}j_\mu(x')\frac{\partial}{\partial x'_\mu}B(x')d^4x'.\tag{12.25}$$

利用 $\sum_{\mu=1}^{4}\partial j_\mu/\partial x_\mu=0$,上式又可写为

$$\chi=\sum_{\mu=1}^{4}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial}{\partial x'_\mu}[j_\mu(x')B(x')]d^4x'.$$

利用高斯定理上式可变为在 $t'=t$ 时整个空间的积分:

$$\chi=\int d^3\boldsymbol{r}j_0(x)B(x).\tag{12.26}$$

由 $j_\mu(x)=ie\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$ 及对易关系(8.36)得

$$\begin{aligned}[j_\mu(\boldsymbol{r},t),j_0(\boldsymbol{r}',t)]=&-e^2\bar{\psi}(\boldsymbol{r},t)\gamma_\mu\psi(\boldsymbol{r}',t)\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\\&+e^2\bar{\psi}(\boldsymbol{r}',t)\gamma_\mu\psi(\boldsymbol{r},t)\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=0.\end{aligned}\tag{12.27}$$

利用上式,我们看到 $j_\mu A_\mu^{(t)}$ 是和χ 对易的.因此(12.23)可写为

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi_J=-\int d^3\boldsymbol{r}\sum_{\mu=1}^{4}j_\mu A_\mu^{(t)}\Psi_J-V\Psi_J,\tag{12.28}$$

$$V=e^{-i\int d^3rj_0(x)B(x)}\int d^3\boldsymbol{r}\left[\sum_{\mu=1}^{4}j_\mu A_\mu^{(l)}\right]e^{i\int d^3rj_0(x)B(x)}.\tag{12.29}$$

假定 A,B 是两个算符，很容易证明下列恒等式：

$$e^{-B}Ae^{B}=A-[B,A]+\frac{1}{2!}[B,[B,A]]$$
$$-\frac{1}{3!}[B,[B,[B,A]]]+\cdots. \qquad (12.30)$$

以 $B=\mathrm{i}\int d^3r j_0(x)B(x)$，$A=\sum_{\mu=1}^{4} j_\mu A_\mu^{(l)}$ 代入并利用对易关系(12.27)和(9.43)，很容易看出上式右边只有前两项不等于零.我们得

$$V=\sum_{\mu=1}^{4} j_\mu A_\mu^{(l)}-\mathrm{i}\Big[\chi,\sum_{\mu=1}^{4} j_\mu A_\mu^{(l)}\Big]. \qquad (12.31)$$

式中 χ 由(12.26)式给出.由展开式(11.24)和(11.20)，并利用对易关系(9.43)和(12.27)得

$$\mathrm{i}\Big[\chi,\sum_{\mu=1}^{4} j_\mu A_\mu^{(l)}\Big]=\frac{1}{2}\int j_0(\boldsymbol{r},t)j_0(\boldsymbol{r}',t)u(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d^3r', \qquad (12.32)$$

$$u(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\frac{1}{2(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{k^2}\big[e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}+e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\big]=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R}, \qquad (12.33)$$

式中

$$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|,$$

所以(12.32)代表电子场中电荷分布的库仑能.

把(12.33)代入(12.31)，(12.28)变为

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi_J=-\int d^3r\sum_{\mu=1}^{4}\{j_\mu A_\mu^{(t)}+j_\mu A_\mu^{(l)}\}\Psi_J$$
$$+\frac{1}{2}\iint_{t'=t} j_0(x)j_0(x')u(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d^3r d^3r'\Psi_J. \qquad (12.34)$$

我们看到上式不包含算符 $A_\mu^{(k)}$. 所以 Ψ_J 代表没有 k 光子存在的态.但在这个态里 l 光子仍然是存在的. Ψ_J 满足和自由电磁场所满足的相同的洛伦兹条件，即

$$c_l(\boldsymbol{k})\Psi_J=0. \qquad (12.35)$$

由于(12.34)的右边含有 l 光子的放出算符，Ψ_J 所代表的态仍可有 l 光子存在.命 Ψ_L 代表 l 光子场的态矢量，这个场的真空态可由 Ψ_{L0} 表示.命 Ψ_T 代表电磁场的横场和电子场的态矢量，我们得

$$\Psi_J=\Psi_L\Psi_T. \qquad (12.36)$$

因为 Ψ_L 代表纯 l 光子的态，由§9的结果得

$$\Psi_{Ln}^{\dagger}\Psi_{Ln}=0, \qquad (12.37)$$

Ψ_{Ln} 代表任一有 n 个 l 光子存在的态.由(12.35)得

$$\Psi_{Ln}^{\dagger}\sum_{\mu=1}^{4} j_\mu A_\mu^{(l)}\Psi_J=0.$$

(12.37)表示除 l 光子的真空态外,所有有 l 光子存在的态的度量(norm)都为零. 在(12.34)式的两边左乘以 Ψ_{l0}^{+},我们立刻得到

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi_T=-\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\sum_{\mu=1}^{4}j_\mu A_\mu^{(t)}\Psi_T + \frac{1}{2}\iint_{t'=t} j_0(x)j_0(x')\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\Psi_T.$$

上面结果表示,我们可以把电磁场的纵场和标量场完全用电荷间的静电场来代替. 这个静电场是没有能量子的. 也就是说,对于这个场,不产生量子化的问题. 因为根据上面推导,这个场的存在是由于(12.32)的右边不等于零所造成,也就是由于 $A_\mu^{(k)}$ 和 $A_\mu^{(l)}$ 的量子化条件所造成的. 但是,如果我们在对电磁场进行量子化以前,先消去与电子相互作用的纵场和标量场的波动,那么所得的结果也是在电荷间出现一个静电场(即库仑场). 这样得出的静电场则完全是一个经典的场. 这个场和波动的场不同的地方是前者只是电荷分布的函数,它是电荷所组成的体系的一个不可分割的部分,因此也就不产生对它单独的进行量子化问题. 比如,氢原子的薛定谔方程所描写的是电子的动能和电子与质子间的库仑能相互转换的量子运动. 这里不存在仅只属于静电场的量子运动.

从上面的推导我们看到,当电子场和电磁场之间有相互作用存在时,自由电磁场的洛伦兹条件(12.13)即不能满足,这时在电磁场中将不仅有 l 光子而且有 k 光子. 在§9中曾经指出有 l 光子和 k 光子同时存在的态的度量将不为零并且给出负的几率,因此必需考虑这种负几率态所产生的影响. 上面的推导指出,如果引用变换(12.21),那么 k 光子的态的影响可以完全用静电场(12.33)来替代. 这样就保证了在实际运算里不会出现负几率困难. 我们注意到变换(12.21)实际是电荷 e 的一个幂级数. 如果我们按照通常微扰论计算,只取这个级数的最低的几项,那么负几率困难将不可能消除,这说明在作微扰计算时,必须不要机械地把所有的函数都对 e 展开.

存在于电荷间的相互作用除库仑场外还有代表磁场的矢量势,

$$A_i(\boldsymbol{r})=\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\frac{j_i(\boldsymbol{r}')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},$$

因为上式满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$,所以它是一个横场. 这个矢量势可用类似于(12.21)式的,但只涉及 $A_\mu^{(t)}$ 的变换得出. 但在通常计算里,我们都不把电流间的矢量势看作是原始的作用.

从前面的讨论我们看到,对电磁场的标量场和纵场进行量子化导致负几率的困难,当没有电荷存在时这些标量场和纵场的量子不造成任何观察上的效果,当有电荷存在时,它们的效果可以完全由电荷间的库仑场来代替. 这就表示纵光子和标量光子(或 k 光子和 l 光子),在客观世界里是不存在的. 事实上在量子场论的最初

发展阶段里，都没有引入这些光子，在处理里，非横场的部分即直接用库仑场来代表. 这样处理的缺点是，由于横场和非横场的区分不是协变的，因此使得计算在形式上不能表现出在洛伦兹变换下应有的协变性. 在 1947 年以后，由于重正化理论的需要，必须把计算结果表成协变形式以便认识它们的物理意义，这就要求在处理里不去区分横场和非横场，在形式上对非横场也进行和横场一样的量子化过渡，所得的结果可以证明是和通常只对横场进行量子化的理论所得的结果完全相同的. 在这样的处理里，l 光子和 k 光子只应理解为因计算的方便而引入的辅助概念，它们不代表任何客观存在的现象.

上面的结果表示描写横场的态矢量 Ψ_T，不管在哪种处理方式里，都是相同的. 在旧的处理里，我们把纵场用不进行量子化的库仑场来代表. 在新的处理里，我们对标量场和纵场形式的进行量子化，因而在考虑了电磁场和电子场的相互作用以后，出现了负几率的态. 本节的推导表明这些负几率态对 Ψ_T 的影响实际上是库仑场(即静电场)的影响，所以只要我们所考虑的对象不超出 Ψ_T 以外，上述负几率的态不会造成任何困难. 在客观世界里出现的态也只有 Ψ_T，因为谁也不可能观察到 l 光子和 k 光子.

在下面一章里我们将考虑在电磁作用下的碰撞问题. 那里我们所有考虑的碰撞前的始态和碰撞后的末态都属于 Ψ_T. 按照本章结论，利用纵光子和标量光子计算出来的结果应和把标量场和纵场代为库仑场所计算出的结果完全相同.

在上面计算里我们只考虑了电磁场和电子场的相互作用. 显然考虑电磁场和带电介子场间的相互作用亦将会给出相同的结论. 由于后一作用涉及场对空间和时间的微分，计算将很是繁复，因为在我们本节所用的哈密顿形式的处理里，相互作用哈密顿量密度比相应的拉氏函数密度要复杂得多.

§ 13 粒子-反粒子反演以及相互作用在这个反演下的不变性

在 § 10 中我们曾指出电磁场和带电粒子场(介子场和电子场)的相互作用拉氏函数密度 $\mathscr{L}_{相互}$ 在洛伦兹变换下是一个不变量. 这个不变性条件，使得可能存在的相互作用的形式受到很大的限制. 现在我们将提出 $\mathscr{L}_{相互}$ 必须满足的一个新的不变性条件，即粒子-反粒子反演下的不变性.

电子和正电子除掉具有相反的电荷以外，其他的力学性质都是完全相同的. 质子和反质子也是这样. 对电磁作用而言，如果我们把所有带电的粒子变为反粒子，带电的反粒子都变为粒子，它的效果只是使得电荷 e 变成 $-e$. 如果我们命四维势 A_μ 在这个变换下也变号，那么 $\mathscr{L}_{相互}$ 在变换下将是一个不变量.

在我们周围的物质里存在的带电粒子是质子和电子，而不是反质子和正电子，

这个事实并不反映着粒子和反粒子在性质上有任何差异.假定在空间里存在有不同数目的粒子和反粒子,那么这两种粒子将通过碰撞转变为辐射,直到只剩下一种粒子时为止.我们可以想象在宇宙的某一部分反质子和正电子的数目多于质子和电子的数目.那么在碰撞和转化以后,剩下来的粒子将只有反质子和正电子.这部分的宇宙,对于我们来讲将是"反物质"的宇宙.

粒子 反粒子反演一般也称为电荷共轭反演.但是对于不带电的粒子如中子和中性介子也可进行这种反演变换.因此这种反演不一定与电荷的变号相关.

下面我们将首先讨论对带电介子场的粒子-反粒子反演.命 $a(\boldsymbol{k})$ 和 $b(\boldsymbol{k})$ 分别代表正介子和负介子的吸收算符.上述反演可表为

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{k}) &\to a_c(\boldsymbol{k}) = U_c a(\boldsymbol{k}) U_c^{-1} = \eta_c b(\boldsymbol{k}), \\ a^*(\boldsymbol{k}) &\to a_c^*(\boldsymbol{k}) = U_c a^*(\boldsymbol{k}) U_c^{-1} = \eta_c^* b^*(\boldsymbol{k}), \\ b(\boldsymbol{k}) &\to b_c(\boldsymbol{k}) = U_c b(\boldsymbol{k}) U_c^{-1} = \eta_c^* a(\boldsymbol{k}), \\ b^*(\boldsymbol{k}) &\to b_c^*(\boldsymbol{k}) = U_c b^*(\boldsymbol{k}) U_c^{-1} = \eta_c a^*(\boldsymbol{k}); \\ &\eta_c \eta_c^* = 1. \end{aligned} \tag{13.1}$$

式中 U_c 的具体表象可以这样得出:令

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{k}) &= \begin{bmatrix} d(\boldsymbol{k}) & 0 \\ 0 & \eta_c c(\boldsymbol{k}) \end{bmatrix}, \quad a^*(\boldsymbol{k}) = \begin{bmatrix} d^*(\boldsymbol{k}) & 0 \\ 0 & \eta_c^* c^*(\boldsymbol{k}) \end{bmatrix}, \\ b(\boldsymbol{k}) &= \begin{bmatrix} c(\boldsymbol{k}) & 0 \\ 0 & \eta_c^* d(\boldsymbol{k}) \end{bmatrix}, \quad b^*(\boldsymbol{k}) = \begin{bmatrix} c^*(\boldsymbol{k}) & 0 \\ 0 & \eta_c d^*(\boldsymbol{k}) \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{13.2}$$

其中 $c(\boldsymbol{k}), c^*(\boldsymbol{k}), d(\boldsymbol{k})$ 和 $d^*(\boldsymbol{k})$ 满足下列对易关系:

$$\begin{aligned} [c(\boldsymbol{k}), c^*(\boldsymbol{k}')] &= \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'), \\ [d(\boldsymbol{k}), d^*(\boldsymbol{k}')] &= \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'). \end{aligned} \tag{13.3}$$

其他的对易括号都等于零.利用(13.3)我们很容易证实(13.2)中的 a, b, a^*, b^* 等量满足所有它们应满足的对易关系.我们立刻看到表示 U_c 的矩阵为

$$U_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{13.4}$$

在坐标空间的场变量 $\varphi(x)$ 为

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\mathrm{d}^3 \boldsymbol{k}}{\sqrt{2k_0}} [a(\boldsymbol{k}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)} + b^*(\boldsymbol{k}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx)}].$$

由(13.1)式我们立刻得到

$$\varphi_c(x) = U_c \varphi(x) U_c^{-1} = \eta_c \varphi^*(x). \tag{13.5}$$

在有电磁场存在时,$\varphi(x)$ 满足的波动方程为

$$\sum_{\mu=1}^{4} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mathrm{i}eA_\mu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mathrm{i}eA_\mu\right)\varphi - \mu^2 \varphi = 0. \tag{13.6}$$

取上式的复数共轭得

$$\sum_{\mu=1}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\mathrm{i}eA_\mu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\mathrm{i}eA_\mu\right)\varphi^* - \mu^2\varphi^* = 0.$$

代入(13.5)我们立刻看到 $\varphi_c(x)$ 所满足的方程为

$$\sum_{\mu=1}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\mathrm{i}eA_\mu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\mathrm{i}eA_\mu\right)\varphi_c - \mu^2\varphi_c = 0. \tag{13.7}$$

比较(13.6)和(13.7)式,我们看到这两式的差别只在于 e 的符号相反.这说明对于带电介子,粒子-反粒子反演正是电荷共轭反演.

对于狄拉克粒子,粒子-反粒子反演可同样由(13.1)给出.我们得

$$\begin{aligned}
a_r(\boldsymbol{p}) &\to a_r^c(\boldsymbol{p}) = U_c a_r(\boldsymbol{p})U_c^{-1} = \eta_c b_r(\boldsymbol{p}),\\
a_r^*(\boldsymbol{p}) &\to a_r^{c*}(\boldsymbol{p}) = U_c a_r^*(\boldsymbol{p})U_c^{-1} = \eta_c^* b_r^*(\boldsymbol{p}),\\
b_r(\boldsymbol{p}) &\to b_r^c(\boldsymbol{p}) = U_c b_r(\boldsymbol{p})U_c^{-1} = \eta_c^* a_r(\boldsymbol{p}),\\
b_r^*(\boldsymbol{p}) &\to b_r^{c*}(\boldsymbol{p}) = U_c b_r^*(\boldsymbol{p})U_c^{-1} = \eta_c a_r^*(\boldsymbol{p}).
\end{aligned} \tag{13.8}$$

由

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_r\int\sqrt{\frac{m}{p_0}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\{a_r(\boldsymbol{p})u_r(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(px)} + b_r^*(\boldsymbol{p})v_r(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(px)}\}, \tag{13.9}$$

我们得

$$\begin{aligned}
\psi_c(x) &= U_c\psi(x)U_c^{-1}\\
&= \frac{\eta_c}{(2\pi)^{3/2}}\sum_r\int\sqrt{\frac{m}{p_0}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\{b_r(\boldsymbol{p})u_r(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(px)}\\
&\quad + a_r^*(\boldsymbol{p})u_r(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(px)}\}.
\end{aligned} \tag{13.10}$$

我们能够找到一个 4×4 的矩阵 C,使得

$$\begin{aligned}
u_r(\boldsymbol{p}) &= C^* v_r^*(\boldsymbol{p}),\\
v_r(\boldsymbol{p}) &= C^* u_r^*(\boldsymbol{p}).
\end{aligned} \tag{13.11}$$

为着得出 C,我们首先写下 u_r 和 v_r 具体的式子.由(6.29)和(8.22a)得

$$\begin{aligned}
u_+(\boldsymbol{p}) &= N\begin{bmatrix}\varphi_{+1/2}\\ \dfrac{\boldsymbol{p}}{p_0+m}\varphi_{+1/2}\end{bmatrix}, \quad u_-(\boldsymbol{p}) = N\begin{bmatrix}\varphi_{-1/2}\\ -\dfrac{\boldsymbol{p}}{p_0+m}\varphi_{-1/2}\end{bmatrix},\\
v_+(\boldsymbol{p}) &= N\begin{bmatrix}-\dfrac{\boldsymbol{p}}{p_0+m}\varphi_{-1/2}\\ \varphi_{-1/2}\end{bmatrix}, \quad v_-(\boldsymbol{p}) = N\begin{bmatrix}\dfrac{\boldsymbol{p}}{p_0+m}\varphi_{+1/2}\\ \varphi_{+1/2}\end{bmatrix};
\end{aligned} \tag{13.12}$$

式中

$$\varphi_{+1/2} = \begin{bmatrix}\cos\dfrac{\theta}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2}\\ \sin\dfrac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}\end{bmatrix}, \quad \varphi_{-1/2} = \begin{bmatrix}-\sin\dfrac{\theta}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2}\\ \cos\dfrac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}\end{bmatrix}, \tag{13.13}$$

θ,φ 代表矢量 $\boldsymbol{p}$ 的球面角. 从上式立刻得到

$$C = C^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\gamma_2. \tag{13.14}$$

由(13.10)和(13.11)两式得

$$\psi_c(x) = \eta_c C^* \psi^*(x) = \eta_c C \psi^*(x). \tag{13.15}$$

上式又可写为

$$\psi_c(x) = \eta_c \overline{C} \overline{\psi}^T, \tag{13.16}$$

$\overline{\psi}^T$ 代表对列矩阵 $\overline{\psi}$ 置换行和列所得的行矩阵. 比较上面两式得

$$\overline{C} = -\overline{C}^{-1} = -\overline{C}^T = \gamma_4 C = -\gamma_4\gamma_2 = \gamma_2\gamma_4. \tag{13.17}$$

我们很容易证实

$$\overline{C}^{-1}\gamma_\mu \overline{C} = -\gamma_\mu^T, \quad \overline{C}^{-1}\gamma_5 \overline{C} = \gamma_5^T. \tag{13.18}$$

下面我们将考察带电粒子场和电磁场的相互作用在粒子-反粒子变换下的不变性. 我们将先考虑带电介子场的情况. 介子场和电磁场的相互作用拉氏函数密度可写为

$$\mathscr{L}_{相互} = \sum_{\mu=1}^{4} ie\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu}\varphi - \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right)A_\mu - \sum_{\mu=1}^{4} e^2 \varphi^* \varphi A_\mu A_\mu. \tag{13.19}$$

我们注意到上式对于介子场的粒子和反粒子并不是对称的. 如果我们以正介子为粒子, 由 φ^* 和 φ 在上式中出现的次序, 我们看到 φ 中放出负介子的部分 $\varphi^{(+)}$ 可以和 φ^* 中吸收负介子的部分 $\varphi^{*(-)}$ 互相抵消, 但 φ^* 中放出正介子的部分 $\varphi^{*(+)}$ 不可能和 φ 中吸收正介子的部分 $\varphi^{(-)}$ 相抵消. 在粒子-反粒子反演下, $\mathscr{L}_{相互}$ 变为

$$\begin{aligned} \mathscr{L}'_{相互} &= U_c \mathscr{L}_{作用} U_c^{-1} \\ &= -\sum_{\mu=1}^{4} ie\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\varphi^* - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu}\right)A_\mu - \sum_{\mu=1}^{4} e^2 \varphi \varphi^* A_\mu A_\mu. \end{aligned} \tag{13.20}$$

在导出上式时, 我们曾引入下面关系

$$U_c A_\mu U_c^{-1} = -A_\mu. \tag{13.21}$$

也就是说 A_μ 具有负的"电荷字称"(引入(13.21)的理由曾在前面讨论过). 从(13.19)和(13.20)两式我们看到 $\mathscr{L}_{相互} \neq \mathscr{L}'_{相互}$. 即 $\mathscr{L}_{相互}$ 在粒子 反粒子反演下不是不变的. 在这个反演下保持不变的 $\mathscr{L}_{相互}$ 显然可由(13.19)和(13.20)的平均给出, 即

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{(不变)}_{相互} &= \frac{1}{2}[\mathscr{L}_{相互} + \mathscr{L}'_{相互}] \\ &= \sum_{\mu=1}^{4} \frac{ie}{2}\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu}\varphi + \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu} - \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\varphi^*\right)A_\mu \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{4}e^2(\varphi^*\varphi+\varphi\varphi^*)A_\mu A_\mu. \tag{13.22}$$

我们注意到在经典波动的极限,(13.19),(13.20)和(13.22)三式都是相同的,因为在这个极限,φ 和 φ^* 将是互相对易的.所以在粒子-反粒子反演下的不变性要求的功用,正是消除由经典理论过渡到量子理论后存在于各因子的次序排列上的不确定性.

为着进一步简化(13.22)式,我们可写

$$\varphi(x)=\varphi^{(+)}(x)+\varphi^{(-)}(x). \tag{13.23}$$

$\varphi^{(+)}(x)$和 $\varphi^{(-)}(x)$分别代表 φ 的正频率和负频率部分,亦即包含放出算符 $b^*(\boldsymbol{k})$和包含吸收算符 $a(\boldsymbol{k})$的部分:

$$\begin{aligned}\varphi^{(+)}&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{2k_0}}b^*(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-i(kx)},\\ \varphi^{(-)}&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{2k_0}}a(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{i(kx)}.\end{aligned} \tag{13.23a}$$

同样对于 $\varphi^*(x)$可写

$$\begin{aligned}\varphi^*(x)&=\varphi^{*(+)}(x)+\varphi^{*(-)}(x),\\ \varphi^{*(+)}&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{2k_0}}a^*(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-i(kx)},\\ \varphi^{*(-)}&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{2k_0}}b(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{i(kx)}.\end{aligned} \tag{13.24}$$

我们得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{(\text{不变})}_{\text{相互}}=&\sum_{\mu=1}^{4}ieN\left[\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}\varphi-\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right]A_\mu-\sum_{\mu=1}^{4}e^2N[\varphi^*\varphi]A_\mu A_\mu\\ &+\sum_{\mu=1}^{4}\frac{ie}{2}\left\{\left[\frac{\partial\varphi^{*(-)}}{\partial x_\mu},\varphi^{(+)}\right]-\left[\varphi^{*(-)},\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x_\mu}\right]\right.\\ &\left.+\left[\varphi^{(-)},\frac{\partial\varphi^{*(+)}}{\partial x_\mu}\right]-\left[\frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial x_\mu},\varphi^{*(+)}\right]\right\}A_\mu\\ &-\sum_{\mu=1}^{4}\frac{1}{2}e^2\{[\varphi^{*(-)},\varphi^{(+)}]+[\varphi^{(-)},\varphi^{*(+)}]\}A_\mu A_\mu.\end{aligned} \tag{13.25}$$

式中 $N[\cdots]$代表将括号中所有算符的正频率部分都放在乘积的左边,所有算符的负频率部分都放在乘积的右边.例如

$$\begin{aligned}N[\varphi^*(x)\varphi(y)]&=N[(\varphi^{*(+)}(x)+\varphi^{*(-)}(x))(\varphi^{(+)}(y)+\varphi^{(-)}(y))]\\ &=\varphi^{*(+)}(x)\varphi^{(+)}(y)+\varphi^{*(+)}(x)\varphi^{(-)}(y)\\ &\quad+\varphi^{(+)}(y)\varphi^{*(-)}(x)+\varphi^{*(-)}(x)\varphi^{(-)}(y),\end{aligned}$$

乘积 $N[\cdots]$一般称为正规乘积.由(13.23)和(13.24)以及 $a(\boldsymbol{k})$,$b(\boldsymbol{k})$等所满足的

对易关系，很容易证实：

$$\left[\frac{\partial\varphi^{*(-)}}{\partial x_\mu},\varphi^{(+)}\right]=\left[\frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial x_\mu},\varphi^{*(+)}\right],$$
$$\left[\varphi^{*(-)},\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x_\mu}\right]=\left[\varphi^{(-)},\frac{\partial\varphi^{*(+)}}{\partial x_\mu}\right], \tag{13.26}$$
$$[\varphi^{*(-)},\varphi^{(+)}]=[\varphi^{(-)},\varphi^{*(+)}].$$

上式右边正是左边的粒子-反粒子反演，很显然对于自由场所有对易关系在这个反演下都是不变的. 于是(13.25)式可写为

$$\mathscr{L}_{相互}^{(不变)}=\sum_{\mu=1}^{4}\mathrm{i}eN\left[\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}\varphi-\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right]A_\mu$$
$$-\sum_{\mu=1}^{4}\{e^2N[\varphi^*\varphi]A_\mu A_\mu+e^2[\varphi^{(-)},\varphi^{*(+)}]A_\mu A_\mu\}. \tag{13.27}$$

我们可对上式最后一项进行进一步的处理. 由于

$$A_\mu A_\mu=(A_\mu^{(+)}+A_\mu^{(-)})(A_\mu^{(+)}+A_\mu^{(-)})$$
$$=A_\mu^{(+)}A_\mu^{(+)}+2A_\mu^{(-)}A_\mu^{(+)}+A_\mu^{(-)}A_\mu^{(-)}+[A_\mu^{(-)},A_\mu^{(+)}]$$
$$=N[A_\mu A_\mu]+[A_\mu^{(-)},A_\mu^{(+)}],$$

(13.27)式的最后一项可写为

$$-\sum_{\mu=1}^{N}e^2\{N[\varphi^*\varphi]+[\varphi^{(-)},\varphi^{*(+)}]\}\{N[A_\mu A_\mu]+[A_\mu^{(-)},A_\mu^{(+)}]\}.$$

我们将在第四章中看到上式中的$[A_\mu^{(-)},A_\mu^{(+)}]$和$[\varphi^{(-)},\varphi^{*(+)}]$项不对任何可观察的物理量有贡献，所以可以略去. 如果我们进一步推广正规乘积的定义使得它在乘积中含有不同类型场的算符时也有意义，即

$$N[\varphi^*\varphi A_\mu A_\mu]\equiv N[\varphi^*\varphi]N[A_\mu A_\mu].$$

于是(13.27)可写为

$$\mathscr{L}_{相互}^{(不变)}=N\left[\sum_{\mu=1}^{4}\mathrm{i}e\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}\varphi-\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)A_\mu-\sum_{\mu=1}^{4}e^2\varphi^*\varphi A_\mu A_\mu\right]=N[\mathscr{L}_{相互}]. \tag{13.27a}$$

在上式中由于所有放出介子的算符都在吸收介子算符的左边，因此式中的算符，不可能互相抵消. 这是导致粒子-反粒子变换下不变性的主要原因.

同样，在电子与电磁场相互作用的情况里，$\mathscr{L}_{相互}$可写为

$$\mathscr{L}_{相互}=\sum_{\mu=1}^{4}\mathrm{i}e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu=\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}\mathrm{i}e\bar{\psi}_\alpha\gamma_{\mu\alpha\beta}\psi_\beta A_\mu. \tag{13.28}$$

经过粒子-反粒子反演，上式变为

$$\mathscr{L}_{相互}=-\sum_{\mu=1}^{4}\mathrm{i}e\bar{\psi}_c\gamma_\mu\psi_c A_\mu+\sum_{\mu=1}^{4}\mathrm{i}e\psi^{\mathrm{T}}\bar{C}^{-1}\gamma_\mu\bar{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}A_\mu. \tag{13.29}$$

在得出上式时，我们曾引用下列关系：

$$\psi_c = \bar{C}\bar{\psi}^{T}, \quad \bar{\psi}_c = -\psi^{T}C^{-1}. \tag{13.30}$$

这里的第二式可由第一式导出. 利用(13.18)第一式,我们得

$$\mathscr{L}^c_{相互} = -\sum_{\mu=1}^{4} ie\psi^{T}\gamma_\mu^{T}\bar{\psi}^{T}A_\mu = \sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} ie\psi_\beta\gamma_{\mu\alpha\beta}\bar{\psi}_\alpha A_\mu.$$

由此得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{(不变)}_{相互} &= \frac{1}{2}\{\mathscr{L}_{相互} + \mathscr{L}^c_{相互}\}\\ &= \sum_{\mu=1}^{4} ieN[\bar{\psi}\gamma_\mu\psi]A_\mu + \sum_{\mu}\sum_{\alpha}\sum_{\beta}\gamma_{\mu\alpha\beta}\{[\bar{\psi}_\alpha^{(-)}, \psi_\beta^{(+)}]_+ - [\psi_\beta^{(-)}, \bar{\psi}_\alpha^{(+)}]_+\}A_\mu.\end{aligned} \tag{13.31}$$

式中 $N[\cdots]$ 当乘积是狄拉克场算符 $\bar{\psi}$ 和 ψ 时,和前面的定义一样,把 $\bar{\psi}^{(+)}$ 和 $\psi^{(+)}$ 移至每项的左边,把 $\bar{\psi}^{(-)}$ 和 $\psi^{(-)}$ 移至每项的右边. 但和介子场不同的是,每交换一次算符的位置必须引入一个负号. 即

$$\begin{aligned} N[\bar{\psi}^{(-)}\psi^{(+)}] &= -\psi^{(+)}\bar{\psi}^{(-)},\\ N[\psi^{(+)}\psi^{(-)}] &= \psi^{(+)}\psi^{(-)},\end{aligned} \tag{13.32}$$

等等. 上式中 $N[\bar{\psi}\gamma_\mu\psi]$ 可写为

$$\begin{aligned} N[\bar{\psi}\gamma_\mu\psi] &= \sum_{\alpha,\beta} N[(\bar{\psi}_\alpha^{(+)} + \bar{\psi}_\alpha^{(-)})\gamma_{\mu\alpha\beta}\cdot(\psi_\beta^{(+)} + \psi_\beta^{(-)})]\\ &= \sum_{\alpha,\beta}\gamma_{\mu\alpha\beta}(\bar{\psi}_\alpha^{(+)}\psi_\beta^{(+)} + \bar{\psi}_\alpha^{(+)}\psi_\beta^{(-)} - \psi_\beta^{(+)}\bar{\psi}_\alpha^{(-)} + \bar{\psi}_\alpha^{(-)}\psi_\beta^{(-)}).\end{aligned} \tag{13.33}$$

利用 $\bar{\psi}^{(\pm)}$ 和 $\psi^{(\pm)}$ 的展开式和 $a(\boldsymbol{k}), b(\boldsymbol{k})$ 等的对易关系,很容易证明

$$[\bar{\psi}_\alpha^{(-)}, \psi_\beta^{(+)}]_+ = [\psi_\beta^{(-)}, \bar{\psi}_\alpha^{(+)}]_+. \tag{13.34}$$

于是(13.31)变为

$$\mathscr{L}^{(不变)}_{相互} = \sum_{\mu=1}^{4} ieN[\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu] = N[\mathscr{L}_{相互}]. \tag{13.35}$$

我们注意到(13.34)式反映着对易关系在粒子-反粒子反演下的不变性. 为着看清这一点,我们利用(13.30)和(13.18)两式得

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,\beta}\gamma_{\mu\alpha\beta}[\bar{\psi}_{c\alpha}^{(-)}(x), \psi_{c\beta}^{(+)}(x')]_+ &= \sum_{\alpha,\beta}\sum_{\lambda,\rho}\gamma_{\mu\alpha\beta}[-\psi_\lambda^{(-)}(\bar{C}^{-1})_{\lambda\alpha}, C_{\beta\rho}\bar{\psi}_\rho^{(+)}]_+\\ &= -\sum_{\lambda,\rho}(\bar{C}^{-1}\gamma_\mu\bar{C})_{\lambda\rho}[\psi_\lambda^{(-)}, \bar{\psi}_\rho^{(+)}]_+\\ &= \sum_{\lambda,\rho}(\gamma_\mu^{T})_{\lambda\rho}[\psi_\lambda^{(-)}, \bar{\psi}_\rho^{(+)}]_+\\ &= \sum_{\alpha,\beta}\gamma_{\mu\alpha\beta}[\psi_\beta^{(-)}(x), \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x')]_+.\end{aligned}$$

因为上式对任意的 x 和 x' 都是正确的，所以我们有

$$[\bar{\psi}_{c\alpha}^{(-)}(x), \psi_{c\beta}^{(+)}(x')]_+ = [\psi_\beta^{(-)}(x), \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x')]_+. \tag{13.36}$$

当对易关系在粒子-反粒子反演下保持不变时，我们有

$$[\bar{\psi}_{c\alpha}^{(-)}(x), \psi_{c\beta}^{(+)}(x')]_+ = [\bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x), \psi_\beta^{(+)}(x')]_+. \tag{13.37}$$

由上面两式得到

$$[\psi_\alpha^{(-)}(x), \psi_\beta^{(+)}(x')]_+ = [\psi_\beta^{(-)}(x), \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x')]_+.$$

命 $x=x'$，立刻给出(13.34)式. 这说明(13.34)式反映着(13.37)式的正确性.

应当指出，在第二章对自由场的处理里，我们实际上也已把自由场的拉氏函数密度写成正规乘积加上没有观察意义的无穷大的零点能项. 这一项的出现反映着由经典理论过渡到量子理论时，在各算符乘积的次序上所存在的不确定性. 本节的结果指出当带电粒子场和电磁场作用时，在粒子-反粒子反演下不变的总拉氏函数密度即可取为总拉氏函数密度的正规乘积. 这样相当于电子场和介子场的情况，我们分别得出

$$\mathscr{L}^{(\text{不变})} = N[\mathscr{L}_{\text{电子}} + \mathscr{L}_{\text{电磁}} + \mathscr{L}_{\text{相互}}],$$

$$\mathscr{L}^{(\text{不变})} = N[\mathscr{L}_{\text{介子}} + \mathscr{L}_{\text{电磁}} + \mathscr{L}_{\text{相互}}].$$

在写成上式后，自由场里出现的无穷大的零点能将自然地被消去. 所以由经典理论过渡到量子理论所带来的乘积次序上的不确定性即通过采取正规乘积（或简称 N 乘积）予以消除.

第四章　碰撞矩阵及其应用

§14　碰撞矩阵的微扰论展开式

量子力学所处理的问题通常可以分为两类：第一类是稳定态的问题，如氢原子的各种能级，一个原子核的磁偶极矩等. 另一类是碰撞问题，如光被原子散射，质子和中子的弹性散射等. 后一类在实验观察上具有特别重要的意义. 因为所有的物理观察量，包括稳定态的物理量，都必须通过碰撞现象进行观察. 一个很明显的例子是对氢原子能级的测量. 这些测量必须通过光谱分析得出，而为着得出光谱，我们必须通过碰撞使原子跃迁到激发态，然后由激发态跃迁回基态而放射出我们所观察到的光谱线. 在量子力学的描述里上述由碰撞到激发，然后再放出光子的整个过程都是碰撞过程.

在处理碰撞问题时，人们并不需要知道薛定谔方程的解的全部. 所需要的只是在离开碰撞区域很远处这个解的渐近行为或这个解在$t\to+\infty$和$-\infty$时的极限行为. 这些渐近行为或极限行为可以用碰撞矩阵或S矩阵表达出来. 这个情况也反映着实际进行观察时的情形，因为任何观察都必须在离原子很远处进行. 因此，观察将只涉及解的渐近行为. 它也只能在碰撞以前和以后很久进行. 测量的时刻和碰撞的时刻间的时间间隔比起碰撞所进行的时间间隔显然要大得多，因此，实际的测量也只反映出相应的解在$t\to\pm\infty$极限时的行为.

令

$$\Psi_{\alpha_1',\alpha_2',\cdots}\equiv|\alpha_1'\alpha_2'\cdots\rangle\equiv|\alpha_{t_1}'\rangle \tag{14.1}$$

为全部互相对易的观察量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots$经实验观察在时间t_1确定有值为$\alpha_1',\alpha_2',\cdots$的态. 这个态在上式中简记为$|\alpha_{t_1}'\rangle$. α_{t_1}'相当于在解薛定谔态方程式时所引入的起始条件. 在碰撞问题里，我们所要考虑的态为$|\alpha'_{-\infty}\rangle$. $\alpha'_{-\infty}$代表在碰撞很久以前的全部独立的观察量的值. 例如在光子和电子碰撞的问题里，$\alpha'_{-\infty}$将包括碰撞前电子的动量和自旋以及光子的动量和偏振.

在碰撞以后我们必须再进行一次测量以测定碰撞所造成的变化. 但这次的测量不可能给出确定的$\alpha''_{+\infty}$值. 因此我们所考虑的态必须由不同$\alpha''_{+\infty}$值态的叠加给出，即

$$|\alpha'_{-\infty}\rangle=\sum_{\alpha''}|\alpha''_{+\infty}\rangle\langle\alpha''_{+\infty}|\alpha'_{-\infty}\rangle. \tag{14.2}$$

$\langle\alpha''_{+\infty}|\alpha'_{-\infty}\rangle$代表$|\alpha'_{-\infty}\rangle$态在$|\alpha''_{+\infty}\rangle$态上的投影，$|\alpha''_{+\infty}\rangle$为在 $t_1\to+\infty$时即在碰撞很久以后测得 α 值为 $\alpha''_{+\infty}$ 的态，它是满足末态条件 $\alpha=\alpha''_{+\infty}$ 的薛定谔方程的解. $\langle\alpha''_{+\infty}|\alpha'_{-\infty}\rangle$作为由始态 $\alpha'_{-\infty}$ 到末态 $\alpha''_{+\infty}$ 的跃迁矩阵元，正是我们解一个碰撞问题所要求出的量. 我们称这个矩阵为碰撞矩阵或 S 矩阵.

关系(14.2)是与表象的选择无关的，如果我们选择薛定谔表象，$|\alpha'_{-\infty}\rangle$和$|\alpha''_{+\infty}\rangle$都是时间 t 的函数，(14.2)式可写为

$$\langle t|\alpha'_{-\infty}\rangle=\sum_{\alpha''}\langle t|\alpha''_{+\infty}\rangle\langle\alpha''_{+\infty}|\alpha'_{-\infty}\rangle, \tag{14.3}$$

或

$$\Psi_{\alpha'_{-\infty}}(t)=\sum_{\alpha''}\Psi_{\alpha''_{+\infty}}(t)\langle\alpha''_{+\infty}|\alpha'_{-\infty}\rangle. \tag{14.4}$$

因为$|\alpha'_{-\infty}\rangle$和$|\alpha''_{+\infty}\rangle$都是同一个薛定谔方程的解，所以$\langle\alpha''_{+\infty}|\alpha'_{-\infty}\rangle$是与 t 无关的，这和选取海森伯表象所得的结果相同.

下面我们将考虑态矢量$|\alpha'_{t_1}\rangle$. 当 $t_1\to\pm\infty$时，这个态矢量即给出前面所需要的$|\alpha'_{\pm\infty}\rangle$. $|\alpha'_{t_1}\rangle$满足的薛定谔方程为

$$-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t_1}|\alpha'_{t_1}\rangle=H|\alpha'_{t_1}\rangle. \tag{14.4a}$$

在§11 中我们曾进一步得出($t_1=t'$)

$$-\mathrm{i}\delta|\alpha'_{t_1}\rangle=\int\mathrm{d}^3r\Big\{\mathscr{H}(\phi_s(\boldsymbol{r},t_1),\pi_s(\boldsymbol{r},t_1))\delta t-\sum_s\pi_s(\boldsymbol{r},t_1)\delta\phi_s(\boldsymbol{r},t_1)\Big\}|\alpha'_{t_1}\rangle. \tag{14.5}$$

在上式中我们没有写出 $\mathscr{H}$ 的另一变数 $\nabla\phi_s(\boldsymbol{r},t_1)$，因为它并不是独立于 $\phi_s(\boldsymbol{r},t_1)$的. 在上面式子里，$\phi_s(\boldsymbol{r},t_1)$和 $\pi_s(\boldsymbol{r},t_1)$代表各种相互作用的场的正则变量. 例如在考虑电子和电磁场相互作用时，$\phi_s(\boldsymbol{r},t_1)$代表 $\psi(\boldsymbol{r},t_1)$，$\psi^*(\boldsymbol{r},t_1)$，$A_\mu(\boldsymbol{r},t_1)$等. 这些算符可以看成是海森伯表象里的算符在 $t=t_1$ 时的值. 这表示我们在上面所用的薛定谔表象在 $t=t_1$ 时是和海森伯表象重合的.

我们可取另一薛定谔表象，使它在 $t=t_2$ 时与海森伯表象重合. 在这个表象里，(14.5)式应换为

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}\delta|\alpha''_{t_2}\rangle=&\int\mathrm{d}^3r\Big\{\mathscr{H}(\phi_s(\boldsymbol{r},t_2),\pi_s(\boldsymbol{r},t_2))\delta t\\&-\sum_s\pi_s(\boldsymbol{r},t_2)\delta\phi_s(\boldsymbol{r},t_2)\Big\}|\alpha''_{t_2}\rangle.\end{aligned} \tag{14.6}$$

$|\alpha''_{t_2}\rangle$和$|\alpha'_{t_1}\rangle$在一般情形下并不代表同一个态，因为假使有一个态在$t=t_1$ 时观察量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots$取确定的值 $\alpha'_1,\alpha'_2,\alpha'_3,\cdots$，那么 $t=t_2$ 时，这些观察量一般不可能仍取确定的值. 取(14.6)式的厄米共轭得

$$\mathrm{i}\delta\langle\alpha''_{t_2}|=\langle\alpha''_{t_2}|\int\mathrm{d}^3r\Big\{\mathscr{H}(\phi_s(\boldsymbol{r},t_2),\pi_s(\boldsymbol{r},t_2))\delta t-\sum_s\pi_s(\boldsymbol{r},t_2)\delta\phi_s(\boldsymbol{r},t_2)\Big\}. \tag{14.7}$$

我们可以在(14.5)式中取 $\delta t = \delta t_1$，这相应于在 $\Psi_{\alpha'_{t_1}}(t)$ 和 $\langle t|\alpha'_t\rangle$ 中取 $t=t_1$. 同样可以在(14.7)式中取 $t=t_2$. 由(14.5)和(14.7)两式，我们得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\delta\langle\alpha''_{t_2}|\alpha'_{t_1}\rangle = \langle\alpha''_{t_2}|&\int_{t=t_2}\mathrm{d}^3r\Big\{\mathscr{H}(\phi_s(x),\pi_s(x))\delta t_2 - \sum_s\pi_s(x)\delta\phi_s(x)\Big\} \\
&- \int_{t=t_1}\mathrm{d}^3r\Big\{\mathscr{H}(\phi_s(x),\pi_s(x))\delta t_1 - \sum_s\pi_s(x)\delta\phi_s(x)\Big\}|\alpha'_{t_1}\rangle.
\end{aligned}
\tag{14.8}
$$

我们已在§11中指出，如果引入下面作用函数(action function)

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\mathscr{L}(\phi_s(x),\phi_{s\mu}(x))\mathrm{d}^4x, \tag{14.9}$$

海森伯表象中的算符 $\phi_s(x)$ 必须满足的场方程式为

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{s\mu}}\Big)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_s}=0. \quad (s=1,2,3,\cdots) \tag{14.10}$$

当我们让 $\phi_s(x)$ 产生一个微小的变化 $\delta\phi_s(x)$ 时，即当

$$\phi_s(x)\to\phi'_s(x)=\phi_s(x)+\delta\phi_s(x) \tag{14.11}$$

时，并且当 $t_1\to t_1+\delta t_1$，$t_2\to t_2+\delta t_2$ 时，S 的改变可以给出，即为

$$
\begin{aligned}
-\delta S = &\int_{t=t_2}\mathrm{d}^3r\Big\{\mathscr{H}(\phi_s(x),\pi_s(x))\delta t_2 - \sum_s\pi_s(x)\delta\phi_s(x)\Big\} \\
&- \int_{t=t_1}\mathrm{d}^3r\Big\{\mathscr{H}(\phi_s(x),\pi_s(x))\delta t_1 - \sum_s\pi_s(x)\delta\phi_s(x)\Big\}.
\end{aligned}
\tag{14.12}
$$

把(14.9)和(14.12)代入(14.8)式，立刻给出

$$-\mathrm{i}\delta\langle\alpha''_{t_2}|\alpha'_{t_1}\rangle = \langle\alpha''_{t_2}|\delta\int_{t_1}^{t_2}\mathscr{L}(\phi_s(x),\phi_{s\mu}(x))\mathrm{d}^4x|\alpha'_{t_1}\rangle. \tag{14.13}$$

上面所讨论的 $\phi_s(x)$ 的改变 $\delta\phi_s(x)$ 可以是由于拉氏函数密度 $\mathscr{L}$ 的改变所造成的. 这个 $\mathscr{L}$ 的改变相当于力学系统性质的改变. 令 $\mathscr{L}$ 的改变为

$$\mathscr{L}\to\mathscr{L}'=\mathscr{L}+\delta\mathscr{L}, \tag{14.14}$$

于是 $\phi'_s(x)$ 即由新的场方程式给出，即

$$\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Big(\frac{\partial\mathscr{L}'}{\partial\phi'_{s\mu}}\Big)-\frac{\partial\mathscr{L}'}{\partial\phi'_s}=0. \tag{14.15}$$

我们将仔细讨论下面的一个重要情况：$\mathscr{L}$ 的改变代表自由场逐渐改变为相互作用的场，在电子和电磁场相互作用的例子里，我们可取

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \mathscr{L}_{电子}+\mathscr{L}_{电磁}+e_1\mathscr{L}_1, \\
\mathscr{L}' &= \mathscr{L}_{电子}+\mathscr{L}_{电磁}+e'_1\mathscr{L}_1,
\end{aligned}
$$

即

$$\delta\mathscr{L}=\delta\mathscr{L}_{相互}=\delta e_1\mathscr{L}_1, \tag{14.16}$$

式中

$$\mathscr{L}_1 = \mathrm{i}\sum_{\mu=1}^{4} N[\bar{\psi}\gamma_\mu \psi A_\mu], \tag{14.17}$$

$$e_1' = e_1 + \delta e_1, \tag{14.18}$$

在上面我们把 e_1 看成一个可变的参量. 当 e_1 由零增加到最大值 e 时,自由场即变为相互作用的场.

将(14.16)代入(14.13)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}\langle \alpha''_{t_2} | \alpha'_{t_1}\rangle = \mathrm{i}\langle \alpha''_{t_2} | \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}_1 \mathrm{d}^4 x | \alpha'_{t_1}\rangle. \tag{14.19}$$

上式又可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}\langle \alpha''_{t_2} | \alpha'_{t_1}\rangle = \mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}^4 x \sum_{\alpha'''_x}\sum_{\alpha''''_x} \langle \alpha''_{t_2} | \alpha'''_x\rangle\langle \alpha'''_x | \mathscr{L}_1(x) | \alpha''''_x\rangle\langle \alpha''''_x | \alpha'_{t_1}\rangle. \tag{14.20}$$

上式中的因子 $\langle \alpha'''_x | \mathscr{L}_1(x) | \alpha''''_x\rangle$ 是在 x 点和海森伯表象重合的薛定谔表象中的矩阵元. 它是与 e_1 无关的,因此在对 e_1 再求微商时可以看成一常数因子. $\langle \alpha''_{t_2} | \alpha'''_x\rangle$ 和 $\langle \alpha'''_x, \alpha'_{t_1}\rangle$ 对 e_1 的微商可直接由(14.19)给出. 我们得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}e^2}\langle \alpha''_{t_2} | \alpha'_{t_1}\rangle = {} & \mathrm{i}^2\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}^4 x \sum_{\alpha'''_x}\sum_{\alpha''''_x} \langle \alpha''_{t_2} | \int_x^{t_2} \mathscr{L}_1(x')\mathrm{d}^4 x' | \alpha'''_x\rangle \\ & \times \langle \alpha'''_x | \mathscr{L}_1(x) | \alpha''''_x\rangle\langle \alpha''''_x | \alpha'_{t_1}\rangle \\ & + \mathrm{i}^2\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}^4 x \sum_{\alpha'''_x}\sum_{\alpha''''_x} \langle \alpha''_{t_2} | \alpha'''_x\rangle\langle \alpha'''_x | \mathscr{L}_1(x) | \alpha''''_x\rangle \\ & \times \langle \alpha''''_x | \int_{t_1}^{x} \mathscr{L}_1(x')\mathrm{d}^4 x' | \alpha'_{t_1}\rangle.\end{aligned} \tag{14.21}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}e^2}\langle \alpha''_{t_2} | \alpha'_{t_1}\rangle = \mathrm{i}^2\langle \alpha''_{t_2} | \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}^4 x \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}^4 x' T[\mathscr{L}_1(x)\mathscr{L}_1(x')] | \alpha'_{t_1}\rangle, \tag{14.22}$$

式中

$$\begin{aligned} T[\mathscr{L}_1(x)\mathscr{L}_1(x')] &= \mathscr{L}_1(x)\mathscr{L}_1(x'), \quad \text{当 } t > t'; \\ T[\mathscr{L}_1(x)\mathscr{L}_1(x')] &= \mathscr{L}_1(x')\mathscr{L}_1(x), \quad \text{当 } t < t'. \end{aligned} \tag{14.23}$$

$T[\cdots]$ 表示对括号中算符的乘积重新排列,使得它们按时间减少的次序由左向右排列. 但在排列的过程中,每改变同一个费米场的两个算符的次序时,必须乘以一个(−1)因子. 我们称 $T[\cdots]$ 为 T 乘积. 这个乘积在后面计算里将经常地出现. 在上面例子里,因为 $\mathscr{L}_1(x)$ 包含两个费米场的算符 $\bar{\psi}(x)$ 和 $\psi(x)$,所以当我们改变任意两个 $\mathscr{L}_1$ 的次序时,不会引入(−1)因子.

我们可以对(14.21)再求一次对 e 的微商. 重复由(14.19)到(14.21)的计算,很容易得出

$$\frac{d^3}{de^3}\langle\alpha''_{t_2}|\alpha'_{t_1}\rangle=i^3\langle\alpha''_{t_2}|\int_{t_1}^{t_2}d^4x\int_{t_1}^{t_2}d^4x'\int_{t_1}^{t_2}d^4x''T[\mathscr{L}_1(x)\times\mathscr{L}_1(x')\mathscr{L}_1(x'')]|\alpha'_{t_1}\rangle. \tag{14.24}$$

很容易看出同样的计算将给出

$$\frac{d^n}{de^n}\langle\alpha''_{t_2}|\alpha'_{t_1}\rangle=i^n\langle\alpha''_{t_2}|\int_{t_1}^{t_2}d^4x'\int_{t_1}^{t_2}d^4x''\cdots\int_{t_1}^{t_2}d^4x^{(n)}\times T[\mathscr{L}_1(x')\mathscr{L}_1(x'')\cdots\mathscr{L}_1(x^{(n)})]|\alpha'_{t_1}\rangle. \tag{14.25}$$

利用上面结果，我们可以将有电磁作用时的矩阵元$\langle\alpha''_{t_2}|\alpha'_{t_1}\rangle$在 $e=0$ 附近展开成 e 的泰勒级数，

$$\begin{aligned}\langle\alpha''_{t_2}|\alpha'_{t_1}\rangle={}&{}_0\langle\alpha''_{t_2}|\alpha'_{t_1}\rangle_0+ie\,{}_0\langle\alpha''_{t_2}|\int_{t_1}^{t_2}d^4x'\mathscr{L}_1(x')|\alpha'_t\rangle_0\\&+\frac{(ie)^2}{2!}\,{}_0\langle\alpha''_{t_2}|\int_{t_1}^{t_2}d^4x'\int_{t_1}^{t_2}d^4x''T[\mathscr{L}_1(x')\mathscr{L}_1(x'')]|\alpha'_t\rangle_0\\&+\frac{(ie)^3}{3!}\,{}_0\langle\alpha''_{t_2}|\int_{t_1}^{t_2}d^4x'\int_{t_1}^{t_2}d^4x''\int_{t_1}^{t_2}d^4x'''T[\mathscr{L}_1(x')\mathscr{L}_1(x'')\\&\times\mathscr{L}_1(x''')]|\alpha'_t\rangle_0+\cdots+\frac{(ie)^n}{n!}\,{}_0\langle\alpha''_{t_2}|\int_{t}^{t_2}d^4x'\int_{t_1}^{t_2}d^4x''\cdots\\&\times\int_{t_1}^{t_2}d^4x^{(n)}T[\mathscr{L}_1(x')\mathscr{L}_1(x'')\cdots\mathscr{L}_1(x^{(n)})]|\alpha'_t\rangle_0;\end{aligned}$$

或

$$\langle\alpha''_{t_2}|\alpha'_{t_1}\rangle={}_0\langle\alpha''_{t_2}|U(t_2,t_1)|\alpha''_{t_1}\rangle_0, \tag{14.26}$$

$$\begin{aligned}U(t_2,t_1)={}&1+ie\int_{t_1}^{t_2}d^4x'\mathscr{L}_1(x')+\frac{(ie)^2}{2!}\int_{t_1}^{t_2}d^4x'\int_{t_1}^{t_2}d^4x''T[\mathscr{L}_1(x')\mathscr{L}_1(x'')]+\cdots\\&+\frac{(ie)^n}{n!}\int_{t_1}^{t_2}d^4x'\int_{t_1}^{t_2}d^4x''\cdots\int_{t_1}^{t_2}d^4x^{(n)}T[\mathscr{L}_1(x')\mathscr{L}_1(x'')\cdots\mathscr{L}_1(x^{(n)})]+\cdots.\end{aligned} \tag{14.27}$$

式中${}_0\langle\alpha''|$和$|\alpha'\rangle_0$代表当作用不存在时的态矢量. 当 $t_1\to-\infty,t_2\to+\infty$时，$\langle\alpha''_{t_2}|\alpha'_{t_1}\rangle$即趋于我们在本节开始时所讨论的碰撞矩阵，

$$\langle\alpha''_{+\infty}|\alpha'_{-\infty}\rangle={}_0\langle\alpha''_{+\infty}|S|\alpha'_{-\infty}\rangle_0,$$

$$\begin{aligned}S={}&1+ie\int_{-\infty}^{+\infty}d^4x'\mathscr{L}_1(x')+\frac{(ie)^2}{2!}\int_{-\infty}^{+\infty}d^4x'\int_{-\infty}^{+\infty}d^4x''T[\mathscr{L}_1(x')\mathscr{L}_1(x'')]+\cdots\\&+\frac{(ie)^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}d^4x'\int_{-\infty}^{+\infty}d^4x''\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}d^4x^{(n)}T[\mathscr{L}_1(x')\mathscr{L}_1(x'')\cdots\mathscr{L}_1(x^{(n)})]+\cdots.\end{aligned} \tag{14.28}$$

当上式第$(n+1)$项中的 n 个时间变数满足 $t^{(i_1)}>t^{(i_2)}>\cdots>t^{(i_n)}$时，上式中的 T 乘积为

$$T[\mathscr{L}_1(x')\mathscr{L}_1(x'')\cdots\mathscr{L}_1(x^{(n)})] = \mathscr{L}_1(x^{(i_1)})\mathscr{L}_1(x^{(i_2)})\cdots\mathscr{L}_1(x^{(i_n)}).$$

在电子和电磁场作用的情形下，$\mathscr{H}_{相互} = -\mathscr{L}_{相互}$，引入 $\mathscr{H}_{相互} = e\mathscr{H}_1$，上式可写为

$$S = 1 - ie\int_{-\infty}^{+\infty} d^4x'\mathscr{H}_1(x') + \frac{(-ie)^2}{2!}\int_{-\infty}^{+\infty} d^4x'\int_{-\infty}^{+\infty} d^4x'' T[\mathscr{H}_1(x')\mathscr{H}_1(x'')] + \cdots$$
$$+ \frac{(-ie)^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty} d^4x'\int_{-\infty}^{+\infty} d^4x''\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} d^4x^{(n)} T\times[\mathscr{H}_1(x')\mathscr{H}_1(x'')\cdots\mathscr{H}_1(x^{(n)})] + \cdots. \tag{14.29}$$

这正是通常在相互作用表象中得出的 S 矩阵的微扰展开式．当相互作用拉氏函数密度包含有对 x_μ 的微分时（如在介子场和电磁场的相互作用的情况里），$\mathscr{H}_{相互} \neq -\mathscr{L}_{相互}$，而且 $\mathscr{H}_{相互}$ 的式子将比 $\mathscr{L}_{相互}$ 复杂得多．利用(14.29)式计算 S 矩阵也将变得十分繁复．在实际运算里，人们必须把(14.29)实际上改变成(14.28)的形式．本节的推导直接给出(14.28)．这是我们的推导比通常利用相互作用表象推导优越的地方[①]．

在(14.28)的右边，因为 e^n 的系数代表被展开量在 $e=0$ 处的第 n 级对 e 的微商，所以这些系数都是在 $e=0$ 时的量，亦即相应于自由场的量．因此，在(14.28)右边的 T 乘积中由(14.17)式给出的 $\mathscr{L}(x)$ 应看作是自由电子场算符 $\bar{\psi}(x)$，$\psi(x)$ 和自由电磁场算符 $A_\mu(x)$ 的函数．这一点是很重要的，因为这时 $\bar{\psi}(x)$，$\psi(x)$ 和 $A_\mu(x)$ 都是 x 的已知函数，这样，在(14.28)式中的积分将可很容易地算出．如果这些算符不是自由场的算符，它们作为 x 的函数则将是未知的，积分根本不可能算出．

为着说明 $\langle\alpha''_{+\infty}|\alpha'_{-\infty}\rangle$ 所代表的物理过程，我们必须先讨论 $|\alpha'_{-\infty}\rangle_0$ 的意义．因为这个态矢量代表自由场的态，一个动量为 $\boldsymbol{p}$，自旋为 s 的电子和一个动量为 $\boldsymbol{k}$，偏振为 ε 的光子的态可表为

$$|\boldsymbol{p},s;\boldsymbol{k},\varepsilon_{-\infty}\rangle = a_s^*(\boldsymbol{p})c_\varepsilon^*(\boldsymbol{k})|0\rangle, \tag{14.30}$$

式中 $a_s^*(\boldsymbol{p})$，$c_\varepsilon^*(\boldsymbol{k})$ 代表自由电子和光子的产生算符，$|0\rangle$ 代表真空态矢量．现在的问题是，这样一个态矢量是否能够代表实际上电子和光子碰撞现象的始态．在碰撞以前很久的时候，始态应该是在空间里存在着一个电子和一个光子，它们间的距离在开始时非常大，因此这两个粒子间的相互作用是不存在的．但这个始态电子显然不是一个不和电磁场作用的自由粒子．在这个电子的周围存在着库仑场．当这个电子以高速运动时，在它的周围还会出现光子．按照量子场论，一个单独存在的物理电子是下面的薛定谔方程的一个本征解：

$$\begin{aligned} E\Psi &= H\Psi, \\ H &= H_{电子} + H_{电磁} + H_{相互}. \end{aligned} \tag{14.31}$$

---

① (14.28)式最早由费曼给出，见 R. P. Feynman *Phys. Rev.* **79** 769(1949)．本节的推导是以下面文献为根据的：J. Schwinger *Phys. Rev.* **82** 914(1950)．

这个本征解的能量应等于电子的质量，总角动量应等于 1/2，电荷应为 $-|e|$. 由于在第一章里所提到的发散困难，这个本征解是不可能求得的. 经过同样的考虑，我们看到在碰撞以前的光子是(14.31)式的另一个本征解，这个解的能量和动量应等于上述光子的能量和动量，电荷应为零，电荷宇称应为负，偏振应为 ε，等等. 由于(14.31)式中 $H_{相互}$ 的效果，这个光子态里将可能发现带相反电荷的电子对. 但是，由于上述发散困难，这个单个物理光子的本征态也是不可能由(14.31)式求出的.

上面的讨论指出一个物理电子和一个物理光子的态不可能简单地由(14.30)给出. 但在另一方面，严格的态矢量也是无法求出的. 为了克服这个困难，人们引入了所谓绝热近似[①]. 在这个近似里，e 假定是一个 t 的函数. 当 t 趋于 $\pm\infty$ 时，e 趋于零，当 t 是有限值时，e 保持常数的值. 这样，当 $t\to\pm\infty$ 时，我们所考虑的力学系统就趋于自由场. 因此可以取(14.30)式作为始态. 这个始态不反映真实的始态的缺点可由下面的效应得到部分的克服. 由(14.30)式代表的始态在碰撞以前将有充分的时间，在电磁作用下逐渐接近于物理的电子和物理的光子. 这个逐渐接近的过程将在微扰论的计算里反映出来. 在碰撞以后，也将有充分的时间使得碰撞后的态逐渐还原到自由场的末态. 在下面几节里，我们将给出(14.28)式的几个具体的应用.

§15 康普顿散射矩阵元的微扰计算

作为 S 矩阵第一个应用，我们考虑电子和光子间的康普顿(Compton)散射. 这个碰撞过程的始态和末态可表为

$$|\boldsymbol{p}r,\boldsymbol{k}\varepsilon\rangle_0 = c_\varepsilon^*(\boldsymbol{k})a_r^*(\boldsymbol{p})|0\rangle, \tag{15.1}$$

$$|\boldsymbol{p}'r',\boldsymbol{k}'\varepsilon'\rangle_0 = c_{\varepsilon'}^*(\boldsymbol{k}')a_{r'}^*(\boldsymbol{p}')|0\rangle. \tag{15.2}$$

$c_\varepsilon^*(\boldsymbol{k})$ 和 $a_r^*(\boldsymbol{p})$ 分别代表光子和电子的产生算符. 由始态到末态的跃迁矩阵元为

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{p}'r',\boldsymbol{k}'\varepsilon'_{+\infty}|\boldsymbol{p}r,\boldsymbol{k}\varepsilon_{-\infty}\rangle &= {}_0\langle \boldsymbol{p}'r',\boldsymbol{k}'\varepsilon'|S|\boldsymbol{p}r,\boldsymbol{k}\varepsilon\rangle_0 \\ &= \langle 0|a_{r'}(\boldsymbol{p}')c_{\varepsilon'}(\boldsymbol{k}')Sa_r^*(\boldsymbol{p})c_\varepsilon^*(\boldsymbol{k})|0\rangle. \end{aligned} \tag{15.3}$$

把上节的(14.28)式代入上式，我们看到 S 对上式有贡献的最低的项是比例于 e^2 的项，因为(14.28)式的右边第一项只有在始态和末态完全相同(即 $\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}, r'=r, \boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}, \varepsilon'=\varepsilon$)时才有贡献，(14.28)式右边第二项(即比例于 e 的项)包含有奇数个(即三个)放出和吸收算符的乘积. 代入(15.3)式将给出奇数个放出和吸收算符乘积的真空平均值，因此结果为零.

在(15.3)中代入 S 中比例于 e^2 的项给出最低级的微扰结果为(下面我们将用 i 和 f 代表始态和末态)，

① Adiabatic approximation，也有译为"浸渐近似"的.

$$\langle b\,a\rangle - \langle 0\,|\,a_{r'}(\boldsymbol{p}')c_{e'}(\boldsymbol{k}')\frac{(\mathrm{i}e)^2}{2!}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4x_1\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4x_2\,T[\mathscr{L}_1(x_1)\mathscr{L}_1(x_2)]a_r^*(\boldsymbol{p})c_e^*(\boldsymbol{k})\,|0\rangle$$

$$= \frac{\mathrm{i}^2(\mathrm{i}e)^2}{2!}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4x_1\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4x_2\langle 0|a_{r'}(\boldsymbol{p}')c_{e'}(\boldsymbol{k}')T\Big[N\Big[\sum_{\mu=1}^{4}\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)A_\mu(x_1)\Big]$$

$$\times N\Big[\sum_{\nu=1}^{4}\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\nu(x_2)\Big]\Big]a_r^*(\boldsymbol{p})c_e^*(\boldsymbol{k})|0\rangle. \tag{15.4}$$

因为电子和光子的产生和吸收算符是互相独立的,我们将讨论下面两个乘积的真空平均值:

$$\langle 0|c_{e'}(\boldsymbol{k}')T[A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)]c_e^*(\boldsymbol{k})|0\rangle, \tag{15.5}$$

$$\langle 0|a_{r'}(\boldsymbol{p}')T[N[\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)]N[\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)]a_r^*(\boldsymbol{p})|0\rangle. \tag{15.6}$$

我们先讨论(15.5)式. 当 $t_1>t_2$ 时这个式子可写为

$$\langle 0|c_{e'}(\boldsymbol{k}')A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)c_e^*(\boldsymbol{k})|0\rangle, \tag{15.7}$$

为使上式不等于零,$A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)$中必须有一个算符和 $c_e^*(\boldsymbol{k})$相抵消,即必须有一个算符吸收掉 $c_e^*(\boldsymbol{k})$所放出的光子. 这个算符必须是 $A_\mu(x_1)$或 $A_\nu(x_2)$的负频率部分 $A_\mu^{(-)}(x_1)$或 $A_\nu^{(-)}(x_2)$. 同样,$A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)$中必须有一个算符,$A_\mu^{(+)}(x_1)$或 $A_\nu^{(+)}(x_2)$,放出将被 $c_e(\boldsymbol{k}')$算符吸收掉的光子. 因此 $A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)$中只有 $A_\mu^{(+)}(x_1)A_\nu^{(-)}(x_2)$和 $A_\mu^{(-)}(x_1)A_\nu^{(+)}(x_2)$项对(15.7)式有贡献. 现在我们先考虑

$$\langle 0|c_{e'}(\boldsymbol{k}')A_\mu^{(+)}(x_1)A_\nu^{(-)}(x_2)c_e^*(\boldsymbol{k})|0\rangle, \tag{15.8}$$

利用下面关系

$$A_\nu^{(-)}(x_2)c_e^*(\boldsymbol{k}) = [A_\nu^{(-)}(x_2),c_e^*(\boldsymbol{k})] + c_e^*(\boldsymbol{k})A_\nu^{(-)}(x_2),$$
$$c_{e'}(\boldsymbol{k}')A_\mu^{(+)}(x_1) = [c_{e'}(\boldsymbol{k}'),A_\mu^{(+)}(x_1)] + A_\mu^{(+)}(x_1)c_{e'}(\boldsymbol{k}'),$$

并利用真空态$|0\rangle$所满足的条件:

$$A_\nu^{(-)}(x_2)|0\rangle = 0,$$
$$\langle 0|A_\mu^{(-)}(x_1) = 0,$$

于是(15.8)可写为

$$\langle 0|c_{e'}(\boldsymbol{k}')A_\mu^{(+)}(x_1)A_\nu^{(-)}(x_2)c_e^*(\boldsymbol{k})|0\rangle = [c_{e'}(\boldsymbol{k}'),A_\mu^{(+)}(x_1)][A_\nu^{(-)}(x_2),c_e^*(\boldsymbol{k})]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3 2\sqrt{kk'}}e_\mu^{(e')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k'x_1)}e_\nu^{(e)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_2)}. \tag{15.9}$$

在导出上式时,我们曾用到

$$\langle 0|0\rangle = 1 \tag{15.10}$$

和

$$\begin{aligned} A_\mu^{(+)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{2k}}\sum_\lambda e_\mu^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})c_\lambda^*(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx)}, \\ A_\mu^{(-)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{2k}}\sum_\lambda e_\mu^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})c_\lambda(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)} \end{aligned} \tag{15.11}$$

以及 $c_\lambda(\boldsymbol{k})$ 和 $c_\epsilon^*(\boldsymbol{k})$ 等的对易关系. 同样的计算给出

$$\langle 0|c_{\epsilon'}(\boldsymbol{k}')A_\mu^{(+)}(x_1)A_\nu^{(-)}(x_2)c_\epsilon^*(\boldsymbol{k})|0\rangle = \langle 0|c_{\epsilon'}(\boldsymbol{k}')A_\nu^{(+)}(x_2)A_\mu^{(-)}(x_1)c_\epsilon^*(\boldsymbol{k})|0\rangle$$

$$= [c_{\epsilon'}(\boldsymbol{k}'),A_\nu^{(-)}(x_2)][A_\mu^{(-)}(x_1)c_\epsilon^*(\boldsymbol{k})] = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{kk'}}e_\nu^{(\epsilon')}e^{-i(k'x_2)}e_\mu^{(\epsilon)}e^{i(kx_1)}. \tag{15.12}$$

(15.8)式应为(15.9)和(15.12)两式之和. 当 $t_1<t_2$ 时得完全相同的结果.

下面我们将考虑(15.6)式. 在这里必须注意到(15.6)式中各因子, 一方面作为算符不能随便改换次序, 另一方面, 它们还是狄拉克矩阵, 改变这些因子的次序将会改变矩阵乘积的意义.

应用前面的考虑, 我们看到 T 乘积中必须出现一个 $\bar{\psi}^{(+)}$ 算符以抵消电子的吸收算符 $a_{r'}(\boldsymbol{p}')$, 并且出现一个 $\psi^{(-)}$ 算符以抵消电子的放出算符 $a_r^*(\boldsymbol{p})$. 为着不破坏狄拉克矩阵乘积的次序, 在(15.6)式中, 我们取的项为

$$\langle 0|a_{r'}(\boldsymbol{p}')T[\bar{\psi}^{(+)}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(-)}(x_2)]a_r^*(\boldsymbol{p})|0\rangle, \tag{15.13}$$

式中 $\bar{\psi}^{(+)}(x_1)$ 应与 $a_{r'}(\boldsymbol{p}')$ 互相抵消, $\psi^{(-)}(x_2)$ 应与 $a_r^*(\boldsymbol{p})$ 互相抵消. 在上式中我们已略去 N 乘积的符号, 我们的了解是所有坐标(x_1 或 x_2)相同的算符的乘积都是 N 乘积. 以后我们将继续这样做. (15.6)式中另一有贡献的项为

$$\langle 0|a_{r'}(\boldsymbol{p}')T[\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi^{(-)}(x_1)\bar{\psi}^{(+)}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)]a_r^*(\boldsymbol{p})|0\rangle. \tag{15.14}$$

但上式可以通过交换积分变数 $x_1\rightleftharpoons x_2, \mu\rightleftharpoons\nu$ 变成(15.13). 所以在下面我们只考虑(15.13)对(15.6)的贡献.

在(15.13)式中, $a_r^*(\boldsymbol{p})$ 与 $\psi^{(-)}(x_2)$ 和 $\psi(x_1)$ 可按下面公式交换次序:

$$\psi^{(-)}(x_2)a_r^*(\boldsymbol{p}) = -a_r^*(\boldsymbol{p})\psi^{(-)}(x_2)+[\psi^{(-)}(x_1),a_r^*(\boldsymbol{p})]_+$$

$$= -a_r^*(\boldsymbol{p})\psi^{(-)}(x_2)+\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{p_0}}u_r(\boldsymbol{p})e^{i(px_2)}, \tag{15.15}$$

$$\psi(x_1)a_r^*(\boldsymbol{p}) = -a_r^*(\boldsymbol{p})\psi(x_1)+\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{p_0}}u_r(\boldsymbol{p})e^{i(px_1)}. \tag{15.16}$$

在得出上式时, 我们曾利用(8.22)和(8.12)两式. 除 $\psi^{(-)}(x_2)$ 和 $\psi(x_1)$ 外, $a_r^*(\boldsymbol{p})$ 和(15.13)中其余的算符都是反对易的, 因此当这些算符与 $a_r^*(\boldsymbol{p})$ 交换次序时只须引入一个(-1)因子. 但我们注意到(15.16)式最后一项是由于 $\psi^{(-)}(x_1)$ 和 $a_r^*(\boldsymbol{p})$ 相抵消所造成的, 它的贡献应归入(15.14)式. 所以在考虑(15.13)式时, $\psi(x_1)$ 也可看成是与 $a_r^*(\boldsymbol{p})$ 反对易的(即可以略去(15.16)的最后一项). 当我们把(15.13)中的 $a_r^*(\boldsymbol{p})$ 利用上述关系移到最左边时, (15.13)变为

$$(-1)^5\langle 0|a_r^*(\boldsymbol{p})a_{r'}(\boldsymbol{p}')T[\bar{\psi}^{(+)}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(-)}(x_2)]|0\rangle$$

$$+\langle 0|a_{r'}(\boldsymbol{p}')T[\bar{\psi}^{(+)}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)]\gamma_\nu$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{p_0}}u_r(\boldsymbol{p})e^{i(px_2)}|0\rangle. \tag{15.17}$$

由于$\langle 0|a_r^*(\boldsymbol{p})=0$,所以上式第一项等于零.用同样考虑我们可把$a_r(\boldsymbol{p})$移到最右边.这时$a_{r'}(\boldsymbol{p}')$同除$\bar{\psi}^{(+)}(x_1)$以外的所有算符都可看成是反对易的.$a_{r'}(\boldsymbol{p}')$和$\bar{\psi}^{(+)}(x_1)$改变次序的公式为

$$a_{r'}(\boldsymbol{p}')\bar{\psi}^{(+)}(x_1) = -\bar{\psi}^{(+)}(x_1)a_{r'}(\boldsymbol{p}') + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{p_0'}}\bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}')e^{-i(p'x_1)}. \tag{15.18}$$

于是,当我们把$a_{r'}(\boldsymbol{p}')$挪至最右时,由于$a_{r'}(\boldsymbol{p}')|0\rangle=0$,(15.17)变为

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m}{\sqrt{p_0p_0'}}\bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}')\gamma_\mu\langle 0|T[\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)]|0\rangle\gamma_\nu u_r(\boldsymbol{p})e^{-i(p'x_1)+i(px_2)}. \tag{15.19}$$

引入

$$S_F(x_1-x_2)\equiv\langle 0|T[\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)]|0\rangle, \tag{15.20}$$

以(15.19)代替(15.13),注意(15.13)和(15.14)对(15.4)给出相同的贡献,再利用(15.9)和(15.12),我们可把(15.4)写成

$$\begin{aligned}\langle b|a\rangle = e^2\frac{1}{(2\pi)^6}\frac{1}{2\sqrt{kk'}}\frac{m}{\sqrt{p_0p_0'}}\int_{-\infty}^{+\infty}d^4x_1\int_{-\infty}^{+\infty}d^4x_2 e^{-i(p'x_1)+i(px_2)}\\ \times\{e^{-i(k'x_1)+i(kx_2)}\bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}')(\gamma\varepsilon')S_F(x_1-x_2)(\gamma\varepsilon)u_r(\boldsymbol{p})\\ +e^{-i(k'x_2)+i(kx_1)}\bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}')(\gamma\varepsilon)S_F(x_1-x_2)(\gamma\varepsilon')u_r(\boldsymbol{p})\},\end{aligned} \tag{15.21}$$

式中

$$(\gamma\varepsilon)=\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu e_\mu^{(s)},\quad (\gamma\varepsilon')=\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu e_\mu^{(s')}. \tag{15.22}$$

由于(15.14)和(15.13)的贡献完全相等,原式中的因子$(2!)^{-1}$被消去.下面我们将计算$S_F(x_1-x_2)$.按定义,

$$S_F(x_1-x_2)=\langle 0|\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle,\quad 当 t_1>t_2; \tag{15.23}$$

$$S_F(x_1-x_2)=-\langle 0|\bar{\psi}(x_2)\psi(x_1)|0\rangle,\quad 当 t_1<t_2. \tag{15.24}$$

由于$\psi^{(-)}(x)|0\rangle=\bar{\psi}^{(-)}(x)|0\rangle=0$,$\langle 0|\psi^{(+)}(x)=\langle 0|\bar{\psi}^{(+)}(x)=0$,(15.23)式可写为

$$\begin{aligned}S_F(x_1-x_2)&=\langle 0|\psi^{(-)}(x_1)\bar{\psi}^{(+)}(x_2)|0\rangle\\ &=\langle 0|[\psi^{(-)}(x_1),\bar{\psi}^{(+)}(x_2)]_+|0\rangle,\quad (t_1>t_2)\end{aligned}$$

用对易关系(8.33)和(8.32)代入,得

$$S_F(x_1-x_2)=-iS^{(-)}(x_1-x_2),\quad 当 t_1>t_2. \tag{15.25}$$

同样计算给出

$$\begin{aligned}S_F(x_1-x_2)&=\langle 0|[\bar{\psi}^{(-)}(x_2),\psi^{(+)}(x_1)]_+|0\rangle\\&=\mathrm{i}S^{(+)}(x_1-x_2),\quad \text{当 } t_1<t_2.\end{aligned}\tag{15.26}$$

式中

$$\begin{aligned}&S^{(\pm)}(x-x')=\left(-\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+m\right)\Delta^{(\pm)}(x-x'),\\&\Delta^{(\pm)}(x-x')=\mp\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\frac{1}{2\omega}\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}(k,x-x')}.\end{aligned}\tag{15.27}$$

式中$(k,x)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t$，$\omega=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}$. 引入

$$\begin{aligned}\Delta_F(x)&=-\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k_0\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}k_0 t}}{\boldsymbol{k}^2+m^2-k_0^2-\mathrm{i}\varepsilon}\\&=-\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}}{k^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon},\end{aligned}\tag{15.28}$$

式中 ε 是一个微小的正数，在积分后趋于零. 对 k_0 进行积分得

$$\begin{aligned}&\Delta_F(x)=-\mathrm{i}\Delta^{(-)}(x),\quad \text{当 } t>0;\\&\Delta_F(x)=\mathrm{i}\Delta^{(+)}(x),\quad \text{当 } t<0.\end{aligned}\tag{15.29}$$

利用上面结果，我们立刻得到

$$S_F(x_1-x_2)=\left(-\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+m\right)\Delta_F(x_1-x_2),\tag{15.30}$$

也即

$$S_F(x_1-x_2)=\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4p''\,\frac{\mathrm{i}\hat{p}''-m}{p''^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p'',x_1-x_2)},\tag{15.31}$$

$$\hat{p}\equiv\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu p_\mu.\tag{15.32}$$

把(15.31)代入(15.21)得

$$\begin{aligned}\langle b|a\rangle=&\frac{e^2}{(2\pi)^6}\frac{m}{2\sqrt{kk'p_0p_0'}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4x_1\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4x_2\int \mathrm{d}^4p''\Big\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p'+k'-p'',x_1)}\\&\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+k-p'',x_2)}\bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}')(\gamma\varepsilon')\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\hat{p}''-m}{p''^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}(\gamma\varepsilon)u_r(\boldsymbol{p})\\&+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p'-k-p'',x_1)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-k'-p'',x_2)}\times\bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}')(\gamma\varepsilon)\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\hat{p}''-m}{p''^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}(\gamma\varepsilon')u_r(\boldsymbol{p})\Big\}.\end{aligned}$$

对 x_1 和 x_2 进行积分给出

$$\begin{aligned}\langle b|a\rangle=&\frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^2}\frac{m}{2\sqrt{kk'p_0p_0'}}\int \mathrm{d}^4p''\Big\{\delta^4(p'+k'-p'')\delta^4(p+k-p'')\\&\times\bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}')(\gamma\varepsilon')\frac{\mathrm{i}\hat{p}''-m}{p''^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}(\gamma\varepsilon)u_r(\boldsymbol{p})\end{aligned}$$

$$+\delta^4(p'-k-p'')\delta^4(p-k'-p'')\bar{u}_{r'}(p')(\gamma\varepsilon)$$

$$\times\frac{\mathrm{i}\hat{p}''-m}{p''^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}(\gamma\varepsilon')u_r(p)\Big\},\tag{15.33}$$

在导出上式时,我们曾利用等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p,x)}\mathrm{d}^4x=(2\pi)^4\delta^4(p).\tag{15.34}$$

很容易看出

$$\delta^4(p'+k'-p'')\delta^4(p+k-p'')=\delta^4(p+k-p'-k')\delta^4(p+k-p''),$$

$$\delta^4(p'-k-p'')\delta^4(p-k'-p'')=\delta^4(p+k-p'-k')\delta^4(p-k'-p'').$$

把上式代入(15.33)式并对 p'' 进行积分得

$$\langle b|a\rangle=\frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^2}\frac{m}{2\sqrt{kk'p_0p_0'}}\delta^4(p'+k'-p-k)$$

$$\times\Big\{\bar{u}_{r'}(p')\hat{\varepsilon}'\frac{\mathrm{i}(\hat{p}+\hat{k})-m}{(p+k)^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\hat{\varepsilon}\,u_r(p)$$

$$+\bar{u}_{r'}(p')\hat{\varepsilon}\frac{\mathrm{i}(\hat{p}-\hat{k}')-m}{(p-k')^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\hat{\varepsilon}'u_r(p)\Big\},\tag{15.35}$$

式中

$$\hat{\varepsilon}\equiv\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu e_\mu^{(\varepsilon)},\quad \hat{\varepsilon}'\equiv\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu e_\mu^{(\varepsilon')}.$$

我们可以用 ε_μ 代替 $e_\mu^{(\varepsilon)}$ 的符号,这样即是

$$\hat{\varepsilon}\equiv\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\varepsilon_\mu,\quad \hat{\varepsilon}'\equiv\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\varepsilon_\mu'.\tag{15.36}$$

这个定义是和(15.32)式一致的.

(15.35)式给出康普顿散射由始态($pr,k\varepsilon$)过渡到末态($p'r',k'\varepsilon'$)的跃迁矩阵元.我们将在下一节从这个矩阵元算出跃迁的几率和碰撞截面.

下面我们将指出,在微扰论的近似下,各种碰撞过程都可用费曼(Feynman)图表示.这个图对 S 矩阵元的计算有很大的帮助.从前面的推导我们看到,(15.35)右边括号里的第一项所代表的过程可以叙述如下:当 $t_1>t_2$ 时,由于 $\mathscr{L}_1(x_2)$ 的作用,始态的电子 $\boldsymbol{p}$ 和光子 $\boldsymbol{k}$ 在 x_2 点被吸收后放出一个四维动量为 p_μ'' 的电子.再由于 $\mathscr{L}_1(x_1)$ 的作用这个电子 p_μ'' 在 x_1 点被吸收再放出末态的电子 $\boldsymbol{p}'$ 和光子 $\boldsymbol{k}'$.当 $t_1<t_2$ 时,上面叙述里在 x_2 放出电子 p_μ'' 然后再在 x_1 吸收这个电子的过程,改为在 x_1 放出正电子再在 x_2 吸收这个正电子,其余的过程都依旧.电子改换为正电子反映在(15.23)改换成(15.24).上述两种情况的费曼图分别由图 1a 和图 1b 给出:图中向上的方向代表时间增加的方向.直线代表电子的"世界线".波状线代表光子的世界线.由两根电子线和一根光子线所组成的"顶点"x_1 和 x_2 代表 $\mathscr{L}_1(x_1)$ 和

$\mathscr{L}_1(x_2)$作用的点.在图中出现的顶点的数目等于微扰计算的级数.电子线是有方向的.方向向上的线代表粒子,方向向下的线代表反粒子.比如在图 1b 中 x_2 点所发生的事件是放出一个电子 p',一个正电子(反粒子)p''和一个光子 k'.有方向的电子线头尾相接不间断地由 $t=-\infty$接到 $t=+\infty$,代表电荷守恒定律.在电子碰撞问题里箭头的方向由 $t=-\infty$走向 $t=+\infty$,在正电子碰撞问题里箭头的方向由 $t=+\infty$走向 $t=-\infty$.

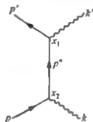


图 1a

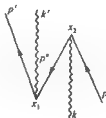


图 1b

由(15.31)我们看到动量变数 p''_μ 的四个分量是完全独立的,因此不直接与 $t=\pm\infty$ 连接的电子线(内电子线)不具有确定的"质量".始态和末态电子线(外电子线)和光子线(外光子线)都具有确定的质量,即 $p^2=p'^2=-m^2,k^2=k'^2=0$.

经过同样的考虑,我们看到(15.35)右边括号里的第二项所代表的过程可用图 2a 和图 2b 的费曼图表示.这两个图和图 1a 和 1b 的差别只是外光子线 k 和 k' 与电子线连接的顶点互相交换.

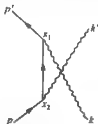


图 2a

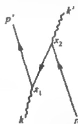


图 2b

在所示的四个费曼图里,x_1 和 x_2 代表(15.4)式中的积分变数.当我们对 x_1 和 x_2 进行积分时,费曼图的顶点 x_1 和 x_2 也将移动.很容易看到图 1a 和 1b(对图 2a 和 2b 可得到同样结论)同是一个费曼图的顶点 x_1 和 x_2 在四维时空中两个不同的位置.所以在后面我们将把图 1a 和 1b 看作同一个费曼图.

利用费曼图我们可以比较容易地由(15.4)式导出(15.21)式.(15.4)式中相当于图 1 中费曼图的部分可以表出为:

$$\frac{e^2}{2!}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4x_1\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4x_2$$

$$\times \sum_{\mu,\nu} \langle 0|a_{r'}(\boldsymbol{p}')c_{\epsilon'}(\boldsymbol{k}')T[\bar{\psi}^{(+)}(x_1)\gamma_\mu \psi(x_1)A_\mu^{(+)}(x_1)\bar{\psi}(x_2)$$

$$\times \gamma_\nu \psi^{(-)}(x_2)A_\nu^{(-)}(x_2)]a_r^*(\boldsymbol{p})c_\epsilon^*(\boldsymbol{k})|0\rangle. \tag{15.37}$$

式中 $\bar{\psi}^{(+)}(x_1)$，$A_\mu^{(+)}(x_1)$代表放出末态粒子的算符，$\psi^{(-)}(x_2)A_\nu^{(-)}(x_2)$代表吸收始态粒子的算符.

$$\psi(x_1) \qquad \bar{\psi}(x_2)$$

表示这一对算符将互相抵消，它们代表放出然后再吸收图 1 中由电子线 p''代表的中间的粒子或中间的反粒子的过程.

我们注意到在(15.37)式中，哪一对算符放出和吸收同一个粒子已经事先确定.每对这样的算符都已由连线标出.这样确定算符对也正是费曼图的内容，每一对算符对于(15.37)的贡献显然等于它们的"真空预期值"：

$$T[\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)] = \langle 0|T[\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)]|0\rangle = S_F(x_1 - x_2),$$

$$a_{r'}(\boldsymbol{p}')\bar{\psi}^{(+)}(x_1) = \langle 0|a_{r'}(\boldsymbol{p}')\bar{\psi}^{(+)}(x_1)|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{p_0'}}\bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}')e^{-i(p'x_1)},$$

$$A_\nu(x_2)\ c_\epsilon^*(\boldsymbol{k}) = \langle 0|A_\nu(x_2)c_\epsilon^*(\boldsymbol{k})|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2k}}e^{i(kx_2)}\varepsilon_\nu,$$

$$\psi^{(-)}(x_2)a_r^*(\boldsymbol{p}) = \langle 0|\psi^{(-)}(x_2)a_r^*(\boldsymbol{p})|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{p_0}}u_r(\boldsymbol{p})e^{i(px_2)},$$

$$c_{\epsilon'}(\boldsymbol{k}')A_\mu(x_1) = \langle 0|c_{\epsilon'}(\boldsymbol{k}')A_\mu(x_1)|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2k'}}e^{-i(k'x_1)}\varepsilon_\mu'. \tag{15.38}$$

不属于同一个对的电子或光子的算符将互相反对易或对易.把上式代入(15.37)立刻给出(15.21)式右边括号中的第一项.同样考虑可从图 2 中的费曼图得出(15.21)式括号中的第二项.

作为费曼图的进一步应用，我们考虑图 3 中所示的一个四级微扰的康普顿散射过程的费曼图.相应的散射矩阵元立刻可写为

$$\langle b|a\rangle_4 = \frac{(ie)^4}{4!}\int d^4x_1\int d^4x_2\int d^4x_3\int d^4x_4\langle 0|a_{r'}(\boldsymbol{p}')c_{\epsilon'}(\boldsymbol{k}')$$

$$\times \sum_\mu\sum_\nu\sum_\rho\sum_\sigma T[\bar{\psi}^{(+)}(x_1)\gamma_\mu$$

$$\times \psi(x_1)A_\mu^{(+)}(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\nu(x_2)\bar{\psi}(x_3)\gamma_\rho\psi(x_3)A_\rho(x_3)\bar{\psi}(x_4)$$

$$\times \gamma_\sigma\psi^{(-)}(x_4)A_\sigma^{(-)}(x_4)]a_r^*(\boldsymbol{p})c_\epsilon^*(\boldsymbol{k})|0\rangle. \tag{15.39}$$

在上式中明显地对如 $a_{r'}(\boldsymbol{p}')$, $\bar{\psi}^{(+)}(x_1)$ 和 $A_\sigma^{(-)}(x_4)$, $c_\epsilon(\boldsymbol{k})$ 等未标出连线. 在上式中代入(15.38)式, 我们得

$$\langle b|a\rangle_4 = \frac{(\mathrm{i}e)^4}{4!}\frac{m}{2\sqrt{p_0 p_0' k k'}}\frac{1}{(2\pi)^6}\int \mathrm{d}^4 x_1 \int \mathrm{d}^4 x_2 \int \mathrm{d}^4 x_3 \int \mathrm{d}^4 x_4$$

$$\times \sum_\nu \sum_\rho \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k'+p',x_1)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+p,x_4)} \bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}')\hat{\varepsilon}'$$

$$\times S_F(x_1-x_2)\gamma_\nu S_F(x_2-x_3)\gamma_\rho S_F(x_3-x_4)\hat{\varepsilon}\, u_r(\boldsymbol{p})$$

$$\times \langle 0|T[A_\nu(x_2)A_\rho(x_3)]|0\rangle. \tag{15.40}$$

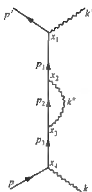


图 3

利用(15.11)和 $c_\lambda^*(\boldsymbol{k})$ 与 $c_\lambda'(\boldsymbol{k})$ 的对易关系得

$$\langle 0|T[A_\nu(x_2)A_\rho(x_3)]|0\rangle = \langle 0|A_\nu^{(-)}(x_2)A_\rho^{(+)}(x_3)|0\rangle$$

$$= -\delta_{\nu\rho}\mathrm{i}D^{(-)}(x_2-x_3), \quad 当\ t_2 > t_3,$$

$$\langle 0|T[A_\nu(x_2)A_\rho(x_3)]|0\rangle = \langle 0|A_\rho^{(-)}(x_3)A_\nu^{(+)}(x_2)|0\rangle$$

$$= \delta_{\nu\rho}\mathrm{i}D^{(+)}(x_2-x_3), \quad 当\ t_2 < t_3.$$

由(15.29)式得

$$\langle 0|T[A_\nu(x_2)A_\rho(x_3)]|0\rangle = \delta_{\nu\rho}D_F(x_1-x_2), \tag{15.41}$$

式中 $D^{(-)}(x)$, $D^{(+)}(x)$, $D_F(x)$ 为当 $m=0$ 时 $\Delta^{(-)}(x)$, $\Delta^{(+)}(x)$, $\Delta_F(x)$ 的值.

如果在(15.40)式中代入

$$\begin{aligned}
S_F(x_1-x_2) &= \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4 p_1 \frac{\mathrm{i}\hat{p}_1 - m}{p_1^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1,x_1-x_2)},\\
S_F(x_2-x_3) &= \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4 p_2 \frac{\mathrm{i}\hat{p}_2 - m}{p_2^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_2,x_2-x_3)},\\
S_F(x_3-x_4) &= \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4 p_3 \frac{\mathrm{i}\hat{p}_3 - m}{p_3^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_3,x_3-x_4)},\\
D_F(x_2-x_3) &= -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4 k'' \frac{1}{k''^2-\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'',x_2-x_3)},
\end{aligned} \tag{15.41a}$$

并对 x_1, x_2, x_3, x_4 进行积分, 则得到

$$\langle b|a\rangle_4 = \frac{-(\mathrm{i}e)^4}{4!(2\pi)^6}\frac{m}{2\sqrt{kk'p_0p_0'}}\int \mathrm{d}^4 p_1 \int \mathrm{d}^4 p_2 \int \mathrm{d}^4 p_3 \int \mathrm{d}^4 k'' \delta^4(p'+k'-p_1)$$

$$\times \delta^4(p_1-p_2-k'')\delta^4(p_2+k''-p_3)\delta^4(p_3-p-k)$$

$$\times \sum_{\rho=1}^4 \bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}')\hat{\varepsilon}'\frac{\mathrm{i}\hat{p}_1-m}{p_1^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\rho\frac{\mathrm{i}\hat{p}_2-m}{p_2^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}$$

$$\times \gamma_\rho\frac{\mathrm{i}\hat{p}_3-m}{p_3^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\hat{\varepsilon}\, u_r(\boldsymbol{p})\frac{1}{k''^2-\mathrm{i}\varepsilon}.$$

对 p_1, p_2, p_3 进行积分消去三个 δ^4 函数, 剩下的一个可写为 $\delta^4(p+k-p'-k')$, 结

果为

$$\langle b|a\rangle_4=\frac{ie^2}{4!(2\pi)^2}\frac{m}{2\sqrt{kk'p_0p_0'}}\delta^4(p+k-p'-k')\bar{u}_{r'}(p')\hat{\varepsilon}'$$

$$\times\frac{i(\hat{p}'+\hat{k}')-m}{(p'+k')^2+m^2-i\varepsilon}K\frac{i(\hat{p}+\hat{k})-m}{(p+k)^2+m^2-i\varepsilon}\hat{\varepsilon}\,u_r(p),\quad(15.42)$$

式中

$$K=\sum_\rho\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k''\gamma_\rho\frac{i(\hat{p}+\hat{k}-\hat{k}'')-m}{(p+k-k'')^2+m^2-i\varepsilon}\gamma_\rho\frac{1}{k''^2-i\varepsilon}.\quad(15.43)$$

我们注意到(15.43)式中的积分是线性发散的.这就是通常所说的量子场论里的发散困难.由于这个困难的存在,在一个很长的时期内,人们认为场论的高级微扰近似是没有物理意义的.现在我们知道,这种发散困难,可以应用重正化理论加以消除,发散困难被消除后的高级微扰近似的计算结果是和实验结果完全相符的.

在图3中我们有意识地取 x_1,x_2,x_3,x_4 顺序代表沿着和电子线的箭头相反的方向的顶点(电子线和光子线连接的点).这样取的好处是在(15.39)式中 ψ 和 $\bar{\psi}$ 间的连线只出现在相邻的两个算符上.这样当这些相连的算符被换成 S_F 函数时就无须改变各因子原有的次序,从而避免了改变式中狄拉克矩阵乘积的次序时所带来的麻烦.

如果我们把图3中由上到下的四个顶点依序标为 x_2,x_1,x_4,x_3,那么在(15.37)式中相连的算符将和该式中原来标出的不一样.这个新的配对方式将对 $\langle b|a\rangle$ 给出独立的贡献.但是很容易看出,如果把 $T[\mathscr{L}_1(x_1)\mathscr{L}_1(x_2)\mathscr{L}_1(x_3)\mathscr{L}_1(x_4)]$ 写成与之完全相等的 $T[\mathscr{L}_1(x_2)\mathscr{L}_1(x_1)\mathscr{L}_1(x_4)\mathscr{L}_1(x_3)]$,我们将发现,这些连线又回复到(15.39)式所示的位置.这说明上述对 $\langle b|a\rangle$ 的新贡献是和(15.42)完全相同的.因为 x_1,x_2,x_3,x_4 共有 4! 个不同的排列的方式,对 $\langle b|a\rangle$ 的总贡献将为 4! 乘(15.42)式.这个因子 4! 正好和原来存在于(15.42)分母中的 4! 相抵消.我们注意到在前面的二级微扰计算里,类似的情形也消去分母中的 2! 因子.所以(15.42)式应换为

$$\langle b|a\rangle_4=\frac{ie^2}{(2\pi)^2}\frac{m}{2\sqrt{kk'p_0p_0'}}\delta^4(p+k-p'-k')\bar{u}_{r'}(p')\hat{\varepsilon}'$$

$$\times\frac{i(\hat{p}'+\hat{k}')-m}{(p'+k')^2+m^2-i\varepsilon}K\frac{i(\hat{p}+\hat{k})-m}{(p+k)^2+m^2-i\varepsilon}\hat{\varepsilon}\,u_r(p),\quad(15.44)$$

式中 K 由(15.43)式给出.

§16 康普顿散射的碰撞截面

上节得出的康普顿散射矩阵元可以写成

$$\langle b|a\rangle = (2\pi)^4\delta^4(p'+k'-p-k)\langle p'k'|M|pk\rangle, \tag{16.1}$$

式中 δ^4 函数表达出能量和动量的守恒定律.因为所有碰撞过程都必须满足这个守恒定律,所以任何两个碰撞粒子由始态动量 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}$ 跃迁到末态动量 $\boldsymbol{p}',\boldsymbol{k}'$ 的散射矩阵元都可以写成上面的形式.下面我们将从(16.1)式出发,导出散射过程的碰撞截面的普遍的式子.

相应于(16.1)式的跃迁几率为

$$|\langle b|a\rangle|^2 = (2\pi)^8[\delta^4(p'+k'-p-k)]^2|\langle p'k'|M|pk\rangle|^2. \tag{16.2}$$

按照 δ^4 函数的定义可写出

$$(2\pi)^4[\delta^4(p'+k'-p-k)]^2 = \delta^4(p'+k'-p-k)\int d^4x e^{i(p'+k'-p-k,x)}.$$

由于上式右边的 δ^4 函数只在积分中指数等于零时才不等于零,上式右边可写为

$$\delta^4(p'+k'-p-k)\int d^4x = \delta^4(p'+k'-p-k)TV,$$

T 和 V 分别代表积分的时间间隔和空间体积.(16.2)式代表全部时间和空间内的跃迁几率.把上式代入(16.2)并除以 TV 我们即得单位时间和单位体积内的跃迁几率.由始态 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}$ 跃迁到所有可能的末态在单位时间和单位体积内的总几率为

$$w = \int d^3\boldsymbol{p}'d^3\boldsymbol{k}'(2\pi)^4\delta^4(p'+k'-p-k)|\langle p'k'|M|pk\rangle|^2. \tag{16.3}$$

在上式的 δ^4 函数中 p' 和 k' 的第四分量代表这两个粒子的能量.即

$$p_4' = ip_0' = i\sqrt{\boldsymbol{p}'^2+m^2}, \quad k_4' = ik_0' = i\sqrt{\boldsymbol{k}'^2+m'^2},$$

m,m' 为这两个粒子的质量.当 k 代表光子时 $m'=0$.上面积分应理解为还包括对末态粒子其他的态变数如自旋 r' 和偏振 ϵ' 的求和.

如果互相碰撞的两种粒子在单位体积内的粒子的数目为 ρ_1 和 ρ_2(每种粒子都具有相同的动量),这两种粒子的相对速度为 v,那么在单位时间内进入单位体积的可以相互碰撞的粒子对数目为 $\rho_1\rho_2 v$.由(16.3)式给出的单位时间和单位体积内的跃迁几率就是上述 $\rho_1\rho_2 v$ 对粒子的跃迁几率.于是每一对粒子的跃迁几率为

$$\sigma = \frac{w}{\rho_1\rho_2 v}. \tag{16.4}$$

这是一个与波函数归一化完全无关的观察量,其量纲为长度的平方.σ 称为碰撞过程的截面.在实验室的坐标里,这一对粒子中的一个可以看作是静止的.它通常是"靶"中的一个粒子.一个运动的粒子被一个静止的粒子散射的几率,等于把静止的粒子看成一个截面为 σ 的球时,这个运动的粒子和球碰撞的几率.当我们从实验室坐标经过洛伦兹变换过渡到运动速度平行于运动粒子的速度 $\boldsymbol{v}$ 的任一运动坐标(其中包括质心坐标)时,σ 的值是不变的.这是因为从对(16.4)式的量纲分析我们看到 σ 代表一个垂直于 $\boldsymbol{v}$ 的面积.

在下面的计算里得到的 σ 将是在自然单位 $\hbar=c=1$ 里的值. 为着得出 σ 在通用单位(即平方厘米)中的值,必须乘上一个面积单位的转换因子. 在康普顿散射这个具体问题里,我们通常还可进一步取电子质量作为能量的单位,即 $m=1$. 我们得下面转换公式

$$\sigma(\text{单位为 cm}^2) = \sigma(\text{单位为 } \hbar=c=m=1)\times\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2, \qquad (16.5)$$

这是因为 $(\hbar/mc)^2$ 是由 $\hbar, m, c$ 组成面积单位的唯一可能. 这也说明为什么我们在计算里采用单位 $\hbar=c=1$,因为它使得所有公式大为简化,同时也很容易把最后结果转换为通用的单位.

现在我们将应用上面结果来计算康普顿散射的碰撞截面.

比较(15.35)和(16.1)两式,我们得

$$\langle p'k'|M|pk\rangle=\frac{ie^2}{(2\pi)^6}\frac{m}{2\sqrt{kk'p_0p_0'}}\bar{u}_{r'}(p')\left\{\hat{\epsilon}'\frac{i(\hat{p}+\hat{k})-m}{(p+k)^2+m^2-i\epsilon}\hat{\epsilon}\right.$$
$$\left.+\hat{\epsilon}\frac{i(\hat{p}-\hat{k}')-m}{(p-k')^2+m^2-i\epsilon}\hat{\epsilon}'\right\}u_r(p). \qquad (16.6)$$

为着进一步使上式简化,可以引入实验室坐标. 在这个坐标里,作为靶的始态电子是静止的,即 $\boldsymbol{p}=0$, $\hat{p}=\gamma_4 p_4=-\gamma_0 p_0$, $p_4=ip_0=im$. 因为 ϵ_μ 和 ϵ'_μ 只有空间分量而 p_μ 只有时间分量,我们得

$$\hat{p}\hat{\epsilon}=-\hat{\epsilon}\hat{p},\quad \hat{p}\hat{\epsilon}'=-\hat{\epsilon}'\hat{p}. \qquad (16.7)$$

$u_r(p)$ 和 $\bar{u}_{r'}(p')$ 满足下列关系:

$$(i\hat{p}+m)u_r(p)=0,\quad \bar{u}_{r'}(p')(i\hat{p}'+m)=0. \qquad (16.8)$$

利用(16.7)和(16.8)两式,(16.6)式可简化为

$$\langle p'k'|M|pk\rangle=\frac{-ie^2}{(2\pi)^6}\frac{m}{2\sqrt{kk'p_0p_0'}}\bar{u}_{r'}(p')\left\{\hat{\epsilon}'\frac{i\hat{k}}{2mk}\hat{\epsilon}+\hat{\epsilon}\frac{i\hat{k}'}{2mk'}\hat{\epsilon}'\right\}u_r(p).$$
$$(16.9)$$

因上式的分母不可能等于零,所以我们已经略去上式分母中的 $i\epsilon$.

在通常实验条件下,始态光子的偏振 ϵ_μ 是一个可控制的因素. 但作为靶的始态电子的自旋 r 是无法控制的. 所以在计算碰撞截面时,我们必须取上式的绝对值平方对始态电子的自旋态的平均. 前面已经指出必须对末态的电子的自旋态求和. 所以在下一步必须计算的量是

$$\frac{1}{2}\sum_r\sum_{r'}|\langle p'k'|M|pk\rangle|^2, \qquad (16.10)$$

式中 $\frac{1}{2}\sum_r$ 代表对始态电子自旋 r 的平均, $\sum_{r'}$ 代表对末态电子自旋 r' 的求和. 通常

计算上式都是通过计算狄拉克矩阵乘积的迹(Spur)，即乘积的对角项之和得出. 在计算中还须引人正能态的投影算符(即所谓克什米尔(Casmir)算符). 整个计算是比较复杂的. 对此有兴趣的读者可以参阅任一量子场论的专著. 我们在本节中将不采用上述求迹的方法，而用把狄拉克的 4×4 矩阵还原为泡利的 2×2 矩阵的方法. 这个计算较为简单，并且清楚地显示出所得结果中各项的物理效应. 这个计算方法能显示物理意义的优点将在 § 19 中 β 衰变问题的计算中更清楚地表明.

在(16.6)中引进

$$\langle p'k'|M|pk\rangle = \frac{-e^2}{4(2\pi)^6}\frac{1}{\sqrt{kk'p_0p_0'}}M', \tag{16.11}$$

并以下列各式代入：

$$u_r(p) = u_r(0) = \begin{bmatrix}\varphi_r\\0\end{bmatrix},$$

$$u_{r'}(p') = N\left(\varphi_{r'}^+, -\varphi_{r'}^+\frac{(\sigma p')}{p_0'+m}\right), \quad N = \sqrt{\frac{p_0'+m}{2m}}, \tag{16.12}$$

$$\gamma_4 = \begin{bmatrix}I & 0\\0 & -I\end{bmatrix}, \quad \gamma_j = \begin{bmatrix}0 & -i\sigma_j\\i\sigma_j & 0\end{bmatrix}, \quad (j=1,2,3)$$

我们得

$$M' = i\varphi_{r'}^+N\left\{\frac{1}{(p_0'+m)}\left[\frac{1}{k}(\sigma p')(\sigma\varepsilon')(\sigma k)(\sigma\varepsilon) + \frac{1}{k'}(\sigma p')(\sigma\varepsilon)(\sigma k')(\sigma\varepsilon')\right]\right.$$
$$\left. + (\sigma\varepsilon')(\sigma\varepsilon) + (\sigma\varepsilon)(\sigma\varepsilon')\right\}\varphi_r.$$

式中三维空间矢量 $k\perp\varepsilon, k'\perp\varepsilon', p'+k'=k$. 利用 σ 的对易关系上式立刻可写为

$$M' = i\varphi_{r'}^+N\left\{\frac{-1}{(p_0'+m)}\left[\frac{1}{k}(\sigma p')(\sigma\varepsilon')(\sigma\varepsilon)(\sigma k)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{k'}(\sigma p')(\sigma\varepsilon)(\sigma\varepsilon')(\sigma k')\right] + 2(\varepsilon'\varepsilon)\right\}\varphi_r. \tag{16.13}$$

利用关系

$$\sum_{r'=1}^{2}\varphi_{r'}\varphi_{r'}^+ = I,$$

我们得

$$\sum_{r'=1}^{2}|M'|^2 = N^2\varphi_r^+\left\{-\frac{1}{(p_0'+m)k}(\sigma k)(\sigma\varepsilon)(\sigma\varepsilon')(\sigma p')\right.$$
$$\left. - \frac{1}{(p_0'+m)k'}(\sigma k')(\sigma\varepsilon')(\sigma\varepsilon)(\sigma p') + 2(\varepsilon'\varepsilon)\right\}$$
$$\times\left\{-\frac{1}{(p_0'+m)k}(\sigma p')(\sigma\varepsilon')(\sigma\varepsilon)(\sigma k)\right.$$

$$-\frac{1}{(p_0'+m)k'}(\boldsymbol{\sigma p}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma k}')+2(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon})\Big\}\varphi_r.$$

即

$$\begin{aligned}\sum_{r'=1}^{2}|M'|^2 = N^2\varphi_r'\Big\{&\frac{2p'^2}{(p_0'+m)^2}+4(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon})^2\\&+\frac{p'^2}{(p_0'+m)^2kk'}[(\boldsymbol{\sigma k})(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma k}')\\&+(\boldsymbol{\sigma k}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})(\boldsymbol{\sigma k})]\\&-\frac{1}{(p_0'+m)}\Big[\frac{2}{k}(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma p}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})(\boldsymbol{\sigma k})\\&+\frac{2}{k}(\boldsymbol{\sigma k})(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma p}')(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')\\&+\frac{2}{k'}(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma p}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma k}')\\&+\frac{2}{k'}(\boldsymbol{\sigma k}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})(\boldsymbol{\sigma p}')(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')\Big]\Big\}\varphi_r.\end{aligned}\tag{16.14}$$

利用对易关系

$$(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})+(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')=2(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'),\tag{16.15}$$

(16.14)式右边括号{ }中第三项可写为

$$\begin{aligned}&\frac{2(p_0'-m)(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')}{(p_0'+m)kk'}[(\boldsymbol{\sigma k}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})(\boldsymbol{\sigma k})+(\boldsymbol{\sigma k})(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma k}')]\\&\quad-2\left(\frac{p_0'-m}{p_0'+m}\right)\frac{(\boldsymbol{kk}')}{kk'},\end{aligned}\tag{16.16}$$

在上式中,我们曾代入等式

$$\frac{p'^2}{(p_0'+m)^2}=\frac{p_0'^2-m^2}{(p_0'+m)^2}=\frac{p_0'-m}{p_0'+m}.\tag{16.17}$$

利用动量守恒条件 $\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'$,(16.14)右边第四项可写为

$$\begin{aligned}&-\frac{2k'(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')}{(p_0'+m)kk'}[(\boldsymbol{\sigma k})(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})(\boldsymbol{\sigma k})-(\boldsymbol{\sigma k}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})(\boldsymbol{\sigma k})\\&\quad+(\boldsymbol{\sigma k})(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma k})-(\boldsymbol{\sigma k})(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma k}')]\\&-\frac{2k'(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')}{(p_0'+m)kk'}[(\boldsymbol{\sigma k})(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma k}')-(\boldsymbol{\sigma k}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma k}')\\&\quad+(\boldsymbol{\sigma k}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})(\boldsymbol{\sigma k})-(\boldsymbol{\sigma k}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})(\boldsymbol{\sigma k}')].\end{aligned}$$

利用(16.15)并重新安排各项,上式可写为

$$\begin{aligned}&-\frac{4(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')^2}{(p_0'+m)}(k-k')-\frac{2(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')(k-k')}{(p_0'+m)kk'}\\&\quad\times[(\boldsymbol{\sigma k})(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma k}')+(\boldsymbol{\sigma k}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon}')(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})(\boldsymbol{\sigma k})].\end{aligned}\tag{16.18}$$

利用能量守恒条件 $k+m=p_0'+k'$,我们立刻看到上式第二项和(16.16)式第一项互相抵消. 于是(16.14)变为

$$\sum_{r'=1}^{2}|M'|^2 = \frac{p_0'+m}{2m}\varphi_r^-\left\{4(\varepsilon'\varepsilon)^2\left[1-\frac{k-k'}{p_0'+m}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{2\boldsymbol{p}'^2}{(p_0'+m)^2}-2\frac{(p_0'-m)}{(p_0'+m)}\frac{(kk')}{kk'}\right\}\varphi_r, \qquad (16.19)$$

因 $k-k'=p_0'-m$,我们得 $[1-(k-k')/(p_0'+m)]=[1-(p_0'-m)/(p_0'+m)]=2m/(p_0'+m)$. 再利用等式

$$\frac{\boldsymbol{p}'^2}{(p_0'+m)^2}=\frac{p_0'-m}{p_0'+m}=\frac{k-k'}{p_0'+m}=\frac{2m}{p_0'+m}\cdot\frac{k-k'}{2m},$$

并注意 $\varphi^-\varphi=1$,(16.19)式变为

$$\sum_{r'=1}^{2}|M'|^2=\left\{4(\varepsilon\varepsilon')^2+\frac{k-k'}{m}\left(1-\frac{(kk')}{kk'}\right)\right\}. \qquad (16.20)$$

由四维能量-动量守恒条件 $p+k-p'-k'=0$ 得 $k-k'=p'-p$,取两边的平方得

$$(k-k')^2=-2(kk')=2kk'-2(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'),$$
$$-(p'-p)^2=2m^2-2mp_0'=2m^2-2m(m+k-k')=-2m(k-k'),$$

注意上式左边的量为电子和光子的初末态四动量,而第一式第二个等号之后以及第二式中的 k,k' 都表示光子的初末态能量,即 $k=|\boldsymbol{k}|$,$k'=|\boldsymbol{k}'|$. 于是

$$1-\frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}')}{kk'}=\frac{m(k-k')}{kk'}, \qquad (16.20a)$$

代入(16.20)得

$$\sum_{r'=1}^{2}|M'|^2=\left\{4(\varepsilon\varepsilon')^2+\frac{k'}{k}+\frac{k}{k'}-2\right\}. \qquad (16.21)$$

上面结果指出,跃迁几率与始态电子的自旋无关. 所以对始态电子的自旋取平均后仍旧给出上式. 如果我们用前面所述求迹的方法,这一点是不能从计算中看出的. 由(16.11)式得

$$\frac{1}{2}\sum_r\sum_{r'}|\langle p'k'|M|pk\rangle|^2=\frac{e^4}{(2\pi)^{12}}\frac{1}{4^2kk'mp_0'}\left\{4(\varepsilon\varepsilon')^2+\frac{k'}{k}+\frac{k}{k'}-2\right\}. \qquad (16.22)$$

在上式括号前的系数里,我们曾代入 $p_0=m$. 把上式代入(16.3)式,并对 p' 积分得

$$\omega=\int d^3k'\delta(p_0'+k'-m-k)\frac{e^4}{(2\pi)^6}\frac{1}{4^2kk'mp_0'}\times\left\{4(\varepsilon\varepsilon')^2+\frac{k'}{k}+\frac{k}{k'}-2\right\}. \qquad (16.23)$$

引入积分变数的变换

$$d^3k'=k'^2dk'd\Omega'=k'^2\frac{dk'}{dE_f}dE_fd\Omega', \qquad (16.24)$$

式中 $E_f = p_0' + k'$ 为末态的总能量，$d\Omega$ 为立体角. 对 dE_f 进行积分得

$$dw = \frac{e^4}{4^2(2\pi)^8}\frac{k'}{k}\frac{1}{mp_0'}\frac{dk'}{dE_f}d\Omega'\left\{4(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')^2 + \frac{k'}{k} + \frac{k}{k'} - 2\right\}. \tag{16.25}$$

为了计算碰撞截面，首先必须给出(16.4)式中 $\rho_1\rho_2$ 的式子和相对速度 v. 因为始态电子是静止的，而光子的速度为 c，所以 $v = c - 1$(因为我们已选取单位态 $\hbar = c = 1$). 始态电子$(\boldsymbol{p}, r)$的密度 ρ_1 可以由下面的考虑求出：描写动量为 $\boldsymbol{p}$ 自旋为 r 的始态电子的态矢量为

$$|\boldsymbol{p}r\rangle = a_r^*(\boldsymbol{p})|0\rangle. \tag{16.26}$$

电荷密度的算符为

$$\rho(\boldsymbol{r}) = e\tilde{\psi}^{(-)}(\boldsymbol{r})\gamma_4\psi^{(-)}(\boldsymbol{r}).$$

在上式中代入(8.22)，我们很容易得出

$$\langle \boldsymbol{p}r|\rho(\boldsymbol{r})|\boldsymbol{p}r\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}e.$$

所以单位体积内的电子数为 $\rho_1 = 1/(2\pi)^3$. 这个电子数是由 $\psi(\boldsymbol{r})$ 中所引入的归一因子决定的.

同样，一个动量为 $\boldsymbol{k}$，偏振为 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的光子的态矢量为

$$|\boldsymbol{k\varepsilon}\rangle = c_\varepsilon^*(\boldsymbol{k})|0\rangle.$$

这个态的能量动量密度为

$$\langle\boldsymbol{k\varepsilon}|\frac{1}{2}(E^2 + H^2)|\boldsymbol{k\varepsilon}\rangle = \langle\boldsymbol{k\varepsilon}|\frac{1}{2}\left(\nabla A_0 - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}\right)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{A})^2|\boldsymbol{k\varepsilon}\rangle.$$

在上式中用(11.10)—(11.12)代入，给出

$$\langle\boldsymbol{k\varepsilon}|\frac{1}{2}(E^2 + H^2)|\boldsymbol{k\varepsilon}\rangle = \frac{k}{(2\pi)^3}.$$

于是按照我们对 $A_\mu(\boldsymbol{r})$所引入的归一因子，在单位体积内的光子数是 $\rho_2 = 1/(2\pi)^3$.

在(16.4)式中，用(16.25)和

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{(2\pi)^3}, \quad v = 1 \tag{16.27}$$

代入，我们得康普顿散射的"微分截面"为

$$d\sigma = \frac{dw}{\rho_1\rho_2 v} = \frac{e^4}{16(2\pi)^2}\frac{k'}{mp_0'k}\frac{dk'}{dE_f}d\Omega'\left\{4(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')^2 + \frac{k'}{k} + \frac{k}{k'} - 2\right\}. \tag{16.28}$$

在上式中 E_f 为

$$\begin{aligned} E_f &= k' + p_0' = k' + \sqrt{(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')^2 + m^2} \\ &= k' + \sqrt{k^2 + k'^2 - 2kk'\cos\theta + m^2}, \end{aligned}$$

式中 θ 为 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{k}'$之间的夹角. 因为积分变数 k' 和 θ(出现在 $d\Omega'$中)是独立的，在求上式对 k'的微分时，必须把 $\cos\theta$ 看成常数. 我们得

$$\frac{\mathrm{d}E_f}{\mathrm{d}k'} = 1 + \frac{k' - k\cos\theta}{p_0'},$$

由(16.20a)得

$$(kk') = kk'\cos\theta = kk' - m(k - k'),$$

从上面两式消去 $\cos\theta$ 得

$$\frac{\mathrm{d}E_f}{\mathrm{d}k'} = \frac{m}{p_0'}\frac{k}{k'}.$$

把上式代入(16.28)式给出微分截面最后的式子为

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{e^4}{16(2\pi)^2}\frac{k'^2}{m^2k^2}\left\{4(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')^2 + \frac{k'}{k} + \frac{k}{k'} - 2\right\}\mathrm{d}\Omega'. \tag{16.29}$$

上式是人们所熟知的克莱因-仁科公式[①]. 它给出动量为 $\boldsymbol{k}$, 偏振为 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的光子被电子散射成为动量为 $\boldsymbol{k}'$, 偏振为 $\boldsymbol{\varepsilon}'$ 的光子的碰撞截面.

当入射光子的能量比电子的静止质量小得多时, 在能量守恒式

$$k + m = k' + \sqrt{m^2 + (\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')^2} \approx k' + m + \frac{1}{2m}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')^2$$

中, 可以忽略去 k/m 和 k'/m 的项. 我们得

$$k \cong k'.$$

把上式代入(16.29)式得

$$\mathrm{d}\sigma \cong \frac{e^4}{4(2\pi)^2 m^2}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')^2\mathrm{d}\Omega'.$$

上式一般称为汤姆孙(Thomson)公式. 它表明当入射光的频率很低时, 它和自由电子的碰撞微分截面只与偏振的方向有关, 而与光的频率无关.

由(16.29)式给出的微分散射截面与实验观察的结果完全相符.

§17　电子和电子的摩勒(Møller)散射

这个过程可由费曼图 4 表示. 相应的 S 矩阵元可写为

$$\begin{aligned}{}_0\langle \boldsymbol{p}_1'r', \boldsymbol{p}_2's' | S_2 | \boldsymbol{p}_1 r, \boldsymbol{p}_2 s\rangle_0 = \langle 0 | a_{r'}(\boldsymbol{p}_1')a_{s'}(\boldsymbol{p}_2')\frac{e^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x_1\int \mathrm{d}^4x_2 \\ \times \sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} T[\bar{\psi}^{(-)}(x_1)\gamma_\mu\psi^{(+)}(x_1) \\ \times \underbrace{A_\mu(x_1)\bar{\psi}^{(-)}(x_2)\gamma_\nu\psi^{(+)}(x_2)A_\nu(x_2)}] \\ \times a_r^*(\boldsymbol{p}_1)a_s^*(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle.\end{aligned} \tag{17.1}$$

---

① Klein and Nishina (1929) *Zeit. Phys.* **52** 853.

在上式中代入§15中(15.41)式，得

$$
\begin{aligned}
T[A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)] &= \langle 0|T[A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)]|0\rangle \\
&= \delta_{\mu\nu}D_F(x_1-x_2) \\
&= -\delta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\,\frac{1}{k^2-\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k,x_1-x_2)}. \qquad (17.2)
\end{aligned}
$$

用(15.38)式，按照图4我们得

$$
\begin{aligned}
{}_0\langle \boldsymbol{p}_1'r',\boldsymbol{p}_2's'|S_2|\boldsymbol{p}_1r,\boldsymbol{p}_2s\rangle_0 &= \frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^{10}2!}\int \mathrm{d}^4x_1\int \mathrm{d}^4x_2\sum_{\mu=1}^4\sum_{\nu=1}^4\int \mathrm{d}^4k \\
&\times\frac{m^2}{\sqrt{p_{10}p_{20}p_{10}'p_{20}'}}[\bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}_1')\gamma_\mu u_r(\boldsymbol{p}_1)][\bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}_2')\gamma_\nu u_s(\boldsymbol{p}_2)]\delta_{\mu\nu}\frac{1}{k^2-\mathrm{i}\varepsilon} \\
&\times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_1'-p_1-k,x_1)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_2'-p_2+k,x_2)}. \qquad (17.3)
\end{aligned}
$$

考虑 $x_1 \longleftrightarrow x_2$ 的贡献消去分母中的2!. 对 x_1 和 x_2 进行积分得

$$
\begin{aligned}
{}_0\langle \boldsymbol{p}_1'r',\boldsymbol{p}_2's'|S_2|\boldsymbol{p}_1r,\boldsymbol{p}_2s\rangle_0 &= \frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^2}\sum_{\mu=1}^4\frac{m}{\sqrt{p_{10}p_{20}p_{10}'p_{20}'}} \\
&\times[\bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}_1')\gamma_\mu u_r(\boldsymbol{p}_1)][\bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}_2')\gamma_\mu u_s(\boldsymbol{p}_2)]\int \mathrm{d}^4k \\
&\times\delta^4(p_1'-p_1-k)\delta^4(k+p_2'-p_2)\frac{1}{k^2-\mathrm{i}\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

再对 k 进行积分，立刻给出

$$
\begin{aligned}
{}_0\langle \boldsymbol{p}_1'r',\boldsymbol{p}_2's'|S_2|\boldsymbol{p}_1r,\boldsymbol{p}_2s\rangle_0 &= \frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^2}\frac{m}{\sqrt{p_{10}p_{20}p_{10}'p_{20}'}}\delta^4(p_1'+p_2'-p_1-p_2) \\
&\times\sum_{\mu=1}^4[\bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}_1')\gamma_\mu u_r(\boldsymbol{p}_1)][\bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}_2')\gamma_\mu u_s(\boldsymbol{p}_2)]\frac{1}{(p_1'-p_1)^2-\mathrm{i}\varepsilon}. \qquad (17.4)
\end{aligned}
$$

当 $t_1>t_2$ 时，(17.2)代表在 x_2 点放出一个光子(包括横光子，标量光子和纵光子)，然后这个光子在 x_1 点被吸收的过程. 按照特殊(狭义)相对论的因果定律，这个光子的速度不可能大于光速 c(我们暂时不排除这个光子的速度小于 c 的可能，因为前面已经指出，这种中间光子不满足 $\sum_\mu k_\mu^2=0$，因此可以具有任意的"质量")，即 x_1 必须不在 x_2 点的光锥外面. 但是(17.3)中对 x_1 和 x_2 的积分是独立的，所以在 x_2 的光锥外面的 x_1 对积分也将有贡献，除非这个贡献自相抵消，所得结果将会违反相对论的因果定律. 下面我们将指出，将积分(17.1)的形式加以改变以后，即可看出当 x_1 在 x_2 的光锥外边时，积分对(17.2)式没有贡献. (17.1)式可写为

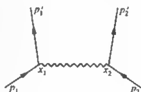


图 4

$$
{}_0\langle \boldsymbol{p}_1' r', \boldsymbol{p}_2' s' | S_2 | \boldsymbol{p}_1 r, \boldsymbol{p}_2 s\rangle_0 = -\frac{e^2}{2!(2\pi)^6}\frac{m^2}{\sqrt{p_{10}p_{20}p_{10}'p_{20}'}}M, \tag{17.5}
$$

$$
M = \sum_\mu \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 j_\mu(x_1) j_\mu(x_2) D_F(x_1 - x_2). \tag{17.6}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
j_\mu(x_1) &= \bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}_1')\gamma_\mu u_r(\boldsymbol{p}_1)e^{-i(p_1'-p_1,x_1)},\\
j_\mu(x_2) &= \bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}_2')\gamma_\mu u_s(\boldsymbol{p}_2)e^{-i(p_2'-p_2,x_2)}.
\end{aligned} \tag{17.7}
$$

在下面讨论里，我们将假定 $p_{10}'-p_{10}>0$. 由能量守恒定律这个假定又可表为 $p_{20}'-p_{20}<0$. 所以当上面假定不被满足即当 $p_{10}'-p_{10}<0$ 时，只消引入交换 $x_1 \rightleftharpoons x_2$ 即可使上面假定得到满足. $p_{10}'-p_{10}=0$ 的情况可了解为 $p_{10}'-p_{10}$ 由正值趋于零的极限. 对 x_1 的积分可写为

$$
\int d^4 x j_\mu(x_1) j_\mu(x_2) D_F(x_1-x_2) = i\int_{t_1<t_2} d^4 x_1 j_\mu(x_1) j_\mu(x_2) D^{(+)}(x_1-x_2)
$$

$$
- i\int_{t_1>t_2} d^4 x_1 j_\mu(x_1) j_\mu(x_2) D^{(-)}(x_1-x_2). \tag{17.8}
$$

在最后一项中，代入

$$
D^{(-)}(x_1-x_2) = D(x_1-x_2) - D^{(+)}(x_1-x_2), \tag{17.9}
$$

立刻给出

$$
\int d^4 x_1 j_\mu(x_1) j_\mu(x_2) D_F(x_1-x_2) = -i\int_{t_1>t_2} d^4 x_1 j_\mu(x_1) j_\mu(x_2) D(x_1-x_2)
$$

$$
+ i\int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 j_\mu(x_1) j_\mu(x_2) D^{(+)}(x_1-x_2). \tag{17.10}
$$

利用(17.7)和 $D^{(+)}(x_1-x_2)$的表达式(即在(8.29)式中代人 $\mu=0$)，上式右边最后一项变为

$$
\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{2k}\bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}_1')\gamma_\mu u_r(\boldsymbol{p}_1)\bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}_2')\gamma_\mu u_s(\boldsymbol{p}_2)\int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 e^{-i(p_1'-p_1+k,x_1-x_2)}
$$

$$
= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{2k}\bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}_1')\gamma_\mu u_r(\boldsymbol{p}_1)\bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}_2')\gamma_\mu u_s(\boldsymbol{p}_2)(2\pi)^4\delta^3(\boldsymbol{p}_1'-\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k})
$$

$$
\times \delta(p_{10}'-p_{10}+k).
$$

因为 $k=|\boldsymbol{k}|\geqslant 0$，又由前面假定 $p_{10}'-p_{10}>0$，因此上式最后一个因子 $\delta(p_{10}'-p_{10}+k)$ 将永远为零. 于是(17.6)变为

$$
M = \sum_\mu \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 j_\mu(x_1) j_\mu(x_2) D_R(x_1-x_2).
$$

$$
D_R(x_1-x_2) = \begin{cases} D(x_1-x_2), & \text{当 } t_1>t_2,\\ 0, & \text{当 } t_1<t_2. \end{cases} \tag{17.11}
$$

命 $\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}, t_1-t_2=t$，我们得

$$D(x_1-x_2)=\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2k}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k,x_1-x_2)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k,x_1-x_2)}]\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{2(2\pi)^3}\int_0^{\infty}k\mathrm{d}k\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\cos\theta\cdot 2\pi[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r\cos\theta-t)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(r\cos\theta-t)}]$$

$$=\frac{-1}{2(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\,\frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r\cos\theta-t)}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$

$$=-\frac{1}{2(2\pi)^2}\,\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r+t)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r-t)}].$$

即

$$D(x)=-\frac{1}{4\pi r}[\delta(r+t)-\delta(r-t)].\tag{17.12}$$

由上面结果得

$$D_R(x_1-x_2)=\delta(r-t)\,\frac{1}{4\pi r}.\tag{17.13}$$

于是

$$M=\sum_{\mu}\int\mathrm{d}^4x_1\int\mathrm{d}^4x_2 j_\mu(x_1)j_\mu(x_2)\delta(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|-(t_1-t_2))\,\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}.\tag{17.14}$$

这个结果表示只有当 x_1 在 x_2 的光锥上时，积分才有贡献. 这证明了(17.2)式是不违反宏观因果定律的. 我们注意到当 x_1 在 x_2 的光锥里面时，积分对 M 的贡献也为零. 这表示这两个电子所交换的光子是以光速前进的. 即一个电子是在另一个电子的推迟场中运动.

在上面所考虑的简单的例子里，我们证明了 $D_F(x_1-x_2)$ 可以替代为 $D_R(x_1-x_2)$. 在一般情形下同样考虑可以证明，所得结果仍旧不违反宏观的因果定律.

除图 4 所给的费曼图外，我们还应该考虑由图 5 给出的费曼图，这个图的末态 p_1' 和 p_2' 互相交换. 同样计算给出

$$_0\langle\boldsymbol{p}_1'r',\boldsymbol{p}_2's'|S_2'|\boldsymbol{p}_1r,\boldsymbol{p}_2s\rangle_0=\frac{-\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^{10}2!}\,\frac{m^2}{\sqrt{p_{10}p_{20}p_{10}'p_{20}'}}\int\mathrm{d}^4x_1\int\mathrm{d}^4x_2\sum_{\mu=1}^4\sum_{\nu=1}^4\int\mathrm{d}^4k$$

$$\times[\bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}_2')\gamma_\mu u_r(\boldsymbol{p}_1)][\bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}_1')\gamma_\nu u_s(\boldsymbol{p}_2)]\delta_{\mu\nu}\,\frac{1}{k^2-\mathrm{i}\varepsilon}$$

$$\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_2'-p_1-k,x_1)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_1'-p_2+k,x_2)}.\tag{17.15}$$

很容易看出(17.3)和(17.15)相当于 $a_{r'}(\boldsymbol{p}_1')a_{s'}(\boldsymbol{p}_2')$ 和 $\bar{\psi}^{(+)}(x_1)\psi^{(+)}(x_2)$ 间两种不同连线的方式. 如果我们再进一步考虑(17.1)式中 $\psi^{(-)}(x_1)\psi^{(-)}(x_2)$ 和 $a_r^*(\boldsymbol{p}_1)a_s^*(\boldsymbol{p}_2)$的另一种连线的方式，将得出由图 6 和图 7 给出的两个费曼图. 但我们立刻看到图 6 和图 7 分别代表在图 5 和图 4 中引入交换 $x_1\rightleftarrows x_2$ 所得的图. 因此这两个图的效果只是消去(17.2)和(17.15)式中的 1/2!.

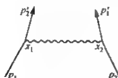


图　5



图　6



图　7

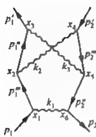


图　8

在前面几节所讨论的例子里，所有的电子线都是由 $t=-\infty$ 走向 $t=+\infty$ 的线. 但还有一类费曼图，它的电子线由 $t=+\infty$ 走向 $t=-\infty$. 这样的电子线将代表正电子. 作为一个例，我们考虑由图 8 给出的过程，这代表一个电子和一个正电子的 e^6 级的散射. 相应的矩阵元可写为

$$
\begin{aligned}
&{}_0\langle \boldsymbol{p}_1' r', \boldsymbol{p}_2' s' | S_6 | \boldsymbol{p}_1 r, \boldsymbol{p}_2 s\rangle_0 \\
&= \frac{e^6}{6!}\langle 0 | a_{r'}(\boldsymbol{p}_1') b_{s'}(\boldsymbol{p}_2') \int \mathrm{d}^4 x_1 \cdots \int \mathrm{d}^4 x_6 \sum_{\mu,\nu,\rho,\sigma,\lambda,\tau} \\
&\quad \times \bar{\psi}^{(-)}(x_1)\gamma_\mu \psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3)\gamma_\rho\psi^{(+)}(x_3)\bar{\psi}^{(+)}(x_4) \\
&\quad \times \gamma_\sigma\psi(x_4)\bar{\psi}(x_5)\gamma_\lambda\psi(x_5)\bar{\psi}(x_6)\gamma_\tau\psi^{(-)}(x_6) \\
&\quad \times A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)A_\rho(x_3)A_\sigma(x_4)A_\lambda(x_5)A_\tau(x_6) \\
&\quad \times a_r^*(\boldsymbol{p}_1) b_s^*(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle.
\end{aligned}
\tag{17.16}
$$

在上式中凡相连的两个狄拉克场算符都是相邻的. 这是因为在图 8 中 $x_1 x_2 \cdots x_6$ 是沿着电子线的箭头向反的方向排列的. 在上式中 $a_{r'}(p_1')$ 和 $\bar{\psi}^{(+)}(x_4)$，$b_{s'}(\boldsymbol{p}_1')$ 和 $\psi^{(+)}(x_3)$，$\psi^{(-)}(x_6)$ 和 $a_s^*(\boldsymbol{p}_2)$ 以及 $\bar{\psi}^{(-)}(x_1)$ 和 $b_r^*(\boldsymbol{p}_1)$ 间的连线都未标出.(17.16) 可进一步写为

$$
\begin{aligned}
{}_0\langle \boldsymbol{p}_1' r', \boldsymbol{p}_2' s' | S_6 | \boldsymbol{p}_1 r, \boldsymbol{p}_2 s\rangle_0 &= \frac{e^6}{(2\pi)^6 6!}\frac{m^2}{\sqrt{p_{10}p_{20}p_{10}'p_{20}'}}\sum_\mu\sum_\nu\sum_\lambda \\
&\quad \times \int \mathrm{d}^4 x_1 \cdots \int \mathrm{d}^4 x_6 \bar{v}_r(\boldsymbol{p}_1)\gamma_\mu S_F(x_1 - x_2)\gamma_\nu S_F(x_2 - x_3)\gamma_\lambda v_{r'}(\boldsymbol{p}_1') \\
&\quad \times \bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}_2')\gamma_\nu S_F(x_4 - x_5)\gamma_\lambda S_F(x_5 - x_6) r_\mu u_s(\boldsymbol{p}_2) D_F(x_1 - x_6) \\
&\quad \times D_F(x_2 - x_4) D_F(x_3 - x_5) \mathrm{e}^{-i(p_1' x_3) - i(p_2' x_4) + i(p_1 x_1) + i(p_2 x_6)}.
\end{aligned}
\tag{17.17}
$$

用 $D_F(x)$ 和 $S_F(x)$ 的(15.41a)式代入此式，并对 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 进行积分得

$$
{}_0\langle p_1' r', p_2' s' | S_6 | p_1 r, p_2 s\rangle_0 = \frac{e^6 \mathrm{i}}{(2\pi)^{10} 6!}\frac{m^2}{\sqrt{p_{10}p_{20}p_{10}'p_{20}'}}\sum_{\mu,\nu,\lambda}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times\int \mathrm{d}^4 p_1''\int \mathrm{d}^4 p_1'''\int \mathrm{d}^4 p_2''\int \mathrm{d}^4 p_2'''\int \mathrm{d}^4 k_1\int \mathrm{d}^4 k_2\int \mathrm{d}^4 k_3\,\delta^4(p_1'-p_1''-k_3)\\
&\times\delta^4(p_1''-p_1'''-k_2)\delta^4(p_1'''-k_1-p_1)\delta^4(p_2+k_1-p_2'')\\
&\times\delta^4(p_2''+k_3-p_2''')\delta^4(p_2'''+k_2-p_2')\\
&\times\bar v_r(p_1)\gamma_\mu\frac{\mathrm{i}\hat p_1'''-m}{p_1'''^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\nu\frac{\mathrm{i}\hat p_1''-m}{p_1''^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\lambda v_{r'}(p_1')\\
&\times\bar u_{s'}(p_2')\gamma_\nu\frac{\mathrm{i}\hat p_2'''-m}{p_2'''^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\lambda\frac{\mathrm{i}\hat p_2''-m}{p_2''^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\mu u_s(p_2)\\
&\times\frac{1}{k_1^2-\mathrm{i}\varepsilon}\,\frac{1}{k_2^2-\mathrm{i}\varepsilon}\,\frac{1}{k_3^2-\mathrm{i}\varepsilon}.
\end{aligned}
\tag{17.18}
$$

上式的四个 δ^4 函数中有一个可写成代表总过程能量动量守恒的因子 $\delta^4(p_1'+p_2'-p_1-p_2)$，另一个可写成 $\delta^4(p_2'-p_2+k_1+k_2+k_3)$，这一因子代表对电子能量动量守恒条件. 对 p_1''，p_1'''，p_2''，p_2'''，k_2 进行积分得

$$
p_1'''=p_1+k_1,\quad p_1''=p_1'-k_3,\quad p_2''=p_2+k_1,
$$
$$
p_2'''=p_2'-k_2,\quad k_2=p_2-p_2'-k_1-k_3.
$$

于是，

$$
\begin{aligned}
{}_0(p_1'r',p_2's'|S_6|p_1r,p_2s)_0&=\frac{e^6\mathrm{i}}{(2\pi)^{10}6!}\,\frac{m^2}{\sqrt{p_{10}p_{20}p_{10}'p_{20}'}}\\
&\times\delta^4(p_1'+p_2'-p_1-p_2)\int \mathrm{d}^4 k_1\int \mathrm{d}^4 k_3\sum_{\mu,\nu,\lambda}\bar v_r(p_1)\gamma_\mu\\
&\times\frac{\mathrm{i}(\hat p_1+\hat k_1)-m}{(p_1+k_1)^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\nu\frac{\mathrm{i}(\hat p_1'-\hat k_3)-m}{(p_1'-k_3)^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\lambda v_{r'}(p_1')\\
&\times\bar u_{s'}(p_2')\gamma_\nu\frac{\mathrm{i}(2\hat p_2'-\hat p_2-\hat k_1-\hat k_3)-m}{(2p_2'-p_2-k_1-k_3)^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\\
&\times\gamma_\lambda\frac{\mathrm{i}(\hat p_2+\hat k_1)-m}{(p_2+k_1)^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\mu u_s(p_2)\\
&\times\frac{1}{k_1^2-\mathrm{i}\varepsilon}\cdot\frac{1}{k_3^2-\mathrm{i}\varepsilon}\,\frac{1}{(p_2-p_2'-k_1-k_3)^2-\mathrm{i}\varepsilon}.
\end{aligned}
\tag{17.19}
$$

这个积分是收敛的.

还有一类的费曼图，其中包括一个或数个封闭的电子线如图 9 所示. 相应于这个封闭的电子线在 S 矩阵中存在如下的因子

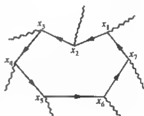


图 9

$$
\bar\psi(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\bar\psi(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)\cdots\bar\psi(x_7)\gamma_\lambda\psi(x_7),
\tag{17.20}
$$

其中相邻的 $\psi(x_n)\bar{\psi}(x_{n+1})$ 都有连线，在两端的 $\bar{\psi}(x_1)$ 和 $\psi(x_7)$ 之间也有一连线. 由于

$$T[\underbrace{\psi_\alpha(x_n)\bar{\psi}_\beta(x_{n+1})}] = \langle 0|\psi_\alpha(x_n)\bar{\psi}_\beta(x_{n+1})|0\rangle = S_{F_{\alpha\beta}}(x_n - x_{n+1}),$$

$$T[\underbrace{\bar{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_7)}] = -T[\psi_\beta(x_7)\bar{\psi}_\alpha(x_1)] = -S_{F_{\beta\alpha}}(x_7 - x_1).$$

因此图 9 所示封闭电子线相当于 S 矩阵中如下的因子：

$$-\mathrm{Sp}[\gamma_\mu S_F(x_1 - x_2)\gamma_\nu S_F(x_2 - x_3)\gamma_\rho S_F(x_3 - x_4)\cdots S_F(x_6 - x_7)\gamma_\lambda S_F(x_7 - x_1)], \tag{17.21}$$

式中 Sp 代表取括号[…]中 4×4 矩阵乘积的对角项之和. 由这个结果我们给出由费曼图写出 S 矩阵的程序如下表所示

相应于费曼图的部分	在 S 矩阵中出现的因子
中间电子线	$\frac{i}{(2\pi)^4}\frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2-i\varepsilon}$
中间光子线	$\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-i\varepsilon}\delta_{\mu\nu}$
顶点	$-e(2\pi)^4\delta^4(p_1-p_2-k)\hat{e}$
顶点*	$-e(2\pi)^4\delta^4(p_1-p_2+k)\hat{e}$
末态电子线	$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{p_0}}\bar{u}_r(p)$
始态电子线	$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{p_0}}u_r(p)$
末态正电子线	$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{p_0}}v_r(p)$
始态正电子线	$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{p_0}}\bar{v}_r(p)$
末态光子线	$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2k}}\varepsilon_\mu$
始态光子线	$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2k}}\varepsilon_\mu$

由于电子算符次序改变可能引入因子−1，须具体分析决定.

---

* 在同一光子线两端顶角的 δ 函数中 k 的符号必须相反.

在用上面程序得出被积函数后，再对所有内电子线和内光子线的变数进行积分，并对重复的标数 $\mu,\nu,\cdots$ 由 1 到 4 求和. 一部分积分将消去式中的 δ^4 函数. 但最后总还有一个代表整个过程的能量和动量守恒的 δ^4 函数不会被积分消去.

［习题］ 当一个费曼图所包括的封闭电子线含有奇数个顶点时（如图 9），利用 S 矩阵在粒子-反粒子反演下的不变性证明相应的 S 矩阵元为零.

§18 光子和带电介子的弹性散射

在本节中我们将应用由(14.28)式给出的碰撞矩阵的微扰论展开式来计算光子和带电介子的碰撞问题. 介子和电磁场的相互作用的拉氏函数密度为

$$\mathscr{L}_{相互} = ie\mathscr{L}_1, \tag{18.1}$$

$$\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_1' + \mathscr{L}_1''. \tag{18.2}$$

式中

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_1' &= \sum_{\mu=1}^{4}\left(\frac{\partial\varphi^*(x)}{\partial x_\mu}\varphi(x) - \varphi^*(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\mu}\right)A_\mu(x), \\ \mathscr{L}_1'' &= \sum_{\mu=1}^{4} ie\varphi^*(x)\varphi(x)A_\mu(x)A_\mu(x). \end{aligned} \tag{18.3}$$

在(18.3)式右边的乘积应了解为 N 乘积. 将(18.2)式代入(14.28)式意味着在(14.28)式的推导过程中我们只把(18.1)式右边的 e 换成由零增加到 e 的变数 e_1，而把(18.2)式右边第二项的系数 e 看成一个固定不变的参数. 由于(18.3)式含有场量对 x_μ 的微商，按通常的办法，即用相互作用哈密顿量密度表达的微扰论展开式(14.29)进行计算，将变得很复杂，这是因为在这个情况下，相应的哈密顿量密度 $\mathscr{H}_1$ 将含有很多项. 但当应用由相互作用的拉氏函数密度表达的展开式(14.28)进行计算时，计算的过程将会简单得多. 这是(14.28)式的一个主要的优点.

作为一个简单的例子，我们考虑一个动量为 $\boldsymbol{p}$ 的介子和一个动量为 $\boldsymbol{k}$ 偏振为 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的光子的最低级(e^2 级)的弹性碰撞问题. 相应的费曼图必须包含两个 $\mathscr{L}_1'$ 的顶点或一个 $\mathscr{L}_1''$ 的顶点. 包含 $\mathscr{L}_1'$ 顶点的费曼图和 §15 中所考虑电子和光子碰撞的费曼图完全一样. $\mathscr{L}_1''$ 的顶点由两根介子线和两根光子线连成. 这些费曼图由图 10 给出.

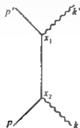


图 10a



图 10b

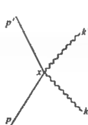


图 10c

相应于图 10a 的 S 矩阵元可表为

$$
{}_0\langle \boldsymbol{p}',\boldsymbol{k}'\varepsilon'|S_2^a|\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}\varepsilon\rangle_0=\langle 0|a(\boldsymbol{p}')c_{\varepsilon'}(\boldsymbol{k}')\mathrm{i}^2\frac{(\mathrm{i}e)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x_1\int \mathrm{d}^4x_2
$$

$$
\times\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}T\Big[\Big(\varphi^{*(+)}(x_1)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x_\mu}\varphi(x_1)\Big)A_\mu^{(+)}(x_1)\Big(\varphi^*(x_2)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x_\nu}
$$

$$
\times\varphi^{(-)}(x_2)\Big)A_\nu^{(-)}(x_2)\Big]a^*(\boldsymbol{p})c_\varepsilon^*(\boldsymbol{k})|0\rangle, \tag{18.4}
$$

式中

$$
\varphi^*(x)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x_\mu}\varphi(x)\equiv\varphi^*(x)\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varphi(x)-\frac{\partial\varphi^*(x)}{\partial x_\mu}\varphi(x),
$$

$$
\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_\mu}\equiv\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\mu}\Big|_{x=x_1}.
$$

$\varphi^{*(+)}$ 和 $\varphi^{(-)}$ 分别代表 φ^* 和 φ 中放出和吸收介子的部分. $\varphi^{(+)}$ 和 $\varphi^{*(-)}$ 代表放出和吸收反粒子(即电荷相反的介子)的部分,因此不在(18.4)式中出现. $\varphi^{*(+)}(x_1)$, $A_\mu^{(+)}(x_1)$ 分别与介子和光子末态吸收算符 $a(\boldsymbol{p}')$, $c_{\varepsilon'}(\boldsymbol{k}')$ 相抵消, $\varphi^{(-)}(x_2)$, $A_\nu^{(-)}(x_2)$ 分别与介子和光子始态放出算符 $a^*(\boldsymbol{p})$, $c_\varepsilon^*(\boldsymbol{k})$ 相抵消. 像在 §15 中一样,我们略去了这些互相抵消的算符间的连线. 在(18.4)式中 $\varphi(x_1)\varphi^*(x_2)$ 代表图 10a 中 x_1 和 x_2 之间的中间介子线. 引人

$$
\Delta_F(x_1-x_2)\equiv\langle 0|T[\varphi^*(x_1)\varphi(x_2)]|0\rangle, \tag{18.5}
$$

很容易导出,当 $t_1>t_2$ 时,

$$
\begin{aligned}
\Delta_F(x_1-x_2)&=\langle 0|\varphi^{*(-)}(x_1)\varphi^{(+)}(x_2)|0\rangle\\
&=-\langle 0|[\varphi^{(+)}(x_2),\varphi^{(-)*}(x_1)]|0\rangle\\
&=-\mathrm{i}\Delta^{(\ )}(x_1-x_2),
\end{aligned}
$$

当 $t_1<t_2$ 时,

$$
\begin{aligned}
\Delta_F(x_1-x_2)&=\langle 0|\varphi^{(-)}(x_2)\varphi^{*(+)}(x_1)|0\rangle\\
&=\langle 0|[\varphi^{(-)}(x_2),\varphi^{*(+)}(x_1)]|0\rangle\\
&-\mathrm{i}\Delta^{(-)}(x_1-x_2).
\end{aligned}
$$

综上结果得

$$
\Delta_F(x_1-x_2)=\begin{cases}-\mathrm{i}\Delta^{(-)}(x_1-x_2), & \text{当 } t_1>t_2;\\ \mathrm{i}\Delta^{(+)}(x_1-x_2), & \text{当 } t_1<t_2.\end{cases} \tag{18.6}
$$

式中 $\Delta^{(\mp)}(x_1-x_2)$ 为

$$
\Delta^{(\pm)}(x_1-x_2)=\mp\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3p\,\frac{1}{2p_0}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}(p,x-x')},
$$

$$
p_0=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+\mu^2},
$$

μ 为介子的静止质量. 由(15.28)我们看到(18.6)又可表为

$$\Delta_F(x_1-x_2)=-\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4 p''\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p''x)}}{p''^2+\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon}. \tag{18.7}$$

我们很容易证明：

$$\begin{aligned} \underbrace{a(\boldsymbol{p}')\varphi^{*(+)}}(x) &= \langle 0|a(\boldsymbol{p}')\varphi^{*(+)}(x),0\rangle \\ &= \langle 0|[a(\boldsymbol{p}'),\varphi^{*(+)}(x)]|0\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2p_0'}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p'x)}, \end{aligned} \tag{18.8}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\varphi^{(-)}(x)a^*(\boldsymbol{p})} &= \langle 0|\varphi^{(-)}(x)a^*(\boldsymbol{p})|0\rangle \\ &= \langle 0|[\varphi^{(-)}(x)a^*(\boldsymbol{p})]|0\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2p_0}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(px)}. \end{aligned}$$

再利用(15.38)的第三和第五两式，我们得

$$\begin{aligned} {}_0\langle \boldsymbol{p}',\boldsymbol{k}'\varepsilon'|S_2^a|\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}\varepsilon\rangle_0 &= \frac{-\mathrm{i}e^2}{2!(2\pi)^{10}}\frac{1}{4\sqrt{p_0p_0'kk'}} \\ &\times\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\int \mathrm{d}^4p''\int \mathrm{d}^4x_1\int \mathrm{d}^4x_2(p_\mu'+p_\mu'')\varepsilon_\mu'\frac{1}{p''^2+\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon} \\ &\times(p_\nu''+p_\nu)\varepsilon_\nu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p'+k'-p'',x_1)-\mathrm{i}(p''-p-k,x_2)}. \end{aligned} \tag{18.9}$$

对 x_1 和 x_2 进行积分给出

$$\begin{aligned} {}_0\langle \boldsymbol{p}',\boldsymbol{k}'\varepsilon'|S_2^a|\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}\varepsilon\rangle_0 &= \frac{-\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^2}\frac{1}{4\sqrt{p_0p_0'kk'}}\int \mathrm{d}^4p''\delta^4(p'+k'-p'') \\ &\times\delta^4(p''-p-k)\frac{((p'+p'')\cdot\boldsymbol{\varepsilon}')((p''+p)\cdot\boldsymbol{\varepsilon})}{p''^2+\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon}. \end{aligned} \tag{18.10}$$

上式中，因子 1/2! 像在 §15 中一样由于考虑到 $x_1\rightleftarrows x_2$ 的贡献而被消去. 在质心坐标系里，$\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}=0$. 对 p'' 进行积分，上式变为

$$\begin{aligned} {}_0\langle \boldsymbol{p}',\boldsymbol{k}'\varepsilon'|S_2^a|\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}\varepsilon\rangle_0 &= \frac{-\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^2}\delta^4(p'+k'-p-k) \\ &\times\frac{1}{4\sqrt{p_0p_0'kk'}}(2\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{\varepsilon}'(2\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{\varepsilon} \\ &\times\frac{1}{(p+k)^2+\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon}. \end{aligned} \tag{18.11}$$

由于 ε_μ 和 ε_μ' 只有空间分量，所以它们在上式中作为三维空间矢量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}'$ 出现. 由 $2\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{k}'=2(\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{k}')-\boldsymbol{k}'=-\boldsymbol{k}'$ 我们得

$$(2\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{\varepsilon}' = \quad \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{\varepsilon}' = 0.$$

用同样的考虑，得到

$$(2\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{\varepsilon} = -\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} = 0.$$

因为 $\boldsymbol{\varepsilon}\perp\boldsymbol{k},\boldsymbol{\varepsilon}'\perp\boldsymbol{k}'$. 把上式代入(18.11)式立刻给出(18.11)式等于零.

用同样方法可以计算相应于费曼图 10b 的 S 矩阵元. 我们注意到这个矩阵元可由在(18.4)中引入下列变换得出：

$$A_\mu^{(+)}(x_1)\to A_\mu^{(-)}(x_1),\quad A_\nu^{(-)}(x_2)\to A_\nu^{(+)}(x_2),$$

这个变换相当于在(18.9)式中引入下列变换：

$$k \rightleftharpoons -k',\quad \varepsilon\rightleftharpoons\varepsilon',$$

即吸收光子 $\boldsymbol{k},\boldsymbol{\varepsilon}$ 应换为放出光子 $\boldsymbol{k}',\boldsymbol{\varepsilon}'$，放出光子 $\boldsymbol{k}',\boldsymbol{\varepsilon}'$ 应换为吸收光子 $\boldsymbol{k},\boldsymbol{\varepsilon}$. 上式中符号的改变代表吸收和放出互相交换. 于是相应于费曼图 10b 的 S 矩阵元为

$$\begin{aligned}{}_0\langle \boldsymbol{p}',\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'|S_2^b|\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_0 = &\frac{-ie^2}{(2\pi)^2}\delta^4(p'+k'-p-k)\\ &\times\frac{1}{4\sqrt{p_0p_0'kk'}}(2p'-k)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(2p-k')\cdot\boldsymbol{\varepsilon}'\\ &\times\frac{1}{(p-k')^2+\mu^2-i\epsilon}.\end{aligned}\tag{18.12}$$

在质心坐标里，$\boldsymbol{p}'=-\boldsymbol{k}',\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{k}$ 并且 $p_0=p_0',k=k'$，由于$(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon})=(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}')=0$，上式变为

$$\begin{aligned}{}_0\langle \boldsymbol{p}',\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'|S_2^b|\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_0 = &\frac{-ie^2}{(2\pi)^2}\delta^4(p'+k'-p-k)\\ &\times\frac{1}{4p_0k}\frac{4(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}')}{2(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}')+2p_0k-i\epsilon}.\end{aligned}\tag{18.13}$$

相应于费曼图 10c 的 S 矩阵元为

$$\begin{aligned}{}_0\langle \boldsymbol{p}',\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'|S_1^c|\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_0 = &-\langle 0|a(\boldsymbol{p}')c_{\varepsilon'}(\boldsymbol{k}')ie^2\int d^4x\sum_{\mu=1}^{4}\varphi^{*(+)}(x)\varphi^{(-)}(x)\\ &\times A_\mu^{(+)}(x)A_\mu^{(-)}(x)a^*(\boldsymbol{p})c_\varepsilon(\boldsymbol{k})|0\rangle.\end{aligned}$$

利用(18.8)式和(15.38)的第二和第四两式，再对 x 进行积分，我们立刻得到：

$${}_0\langle \boldsymbol{p}',\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'|S_1^c|\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_0 = \frac{-ie^2}{(2\pi)^2}\frac{1}{4p_0k}\delta^4(p'+k'-p-k)(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}').$$

所以在质心坐标系中的总跃迁振幅为

$$\begin{aligned}{}_0\langle \boldsymbol{p}',\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'|S|\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_0 = &\frac{-ie^2}{(2\pi)^2}\delta^4(p'+k'-p-k)\\ &\times\frac{1}{4p_0k}\left\{\frac{2(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}')}{p_0k'+(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}')}+(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')\right\}.\end{aligned}$$

应用和前节相同的考虑，我们可以列表给出由费曼图得出介子和光子碰撞矩阵元的程序如下：

相应于费曼图的部分		在 S 矩阵元中出现的因子
中间介子线	p	$\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2+\mu^2-i\varepsilon}$
中间光子线	k	$\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-i\varepsilon}$
顶点	p_2, p_1, k,ε	$ie(2\pi)^4\delta^4(p_1-p_2-k)(p_1+p_2,\varepsilon)$
	k,ε, p_2, p_1	$ie(2\pi)^4\delta^4(p_1-p_2+k)(p_1+p_2,\varepsilon)$
四线顶点	p_2, k_2,ε_2, p_1, k_1,ε_1	$-ie^2(2\pi)^4\delta^4(p_2-p_1-k_1-k_2)(\varepsilon_2\varepsilon_1)$
自由介子线	p p	$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2p_0}}$
自由光子线	k k	$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2k}}\varepsilon_\mu$

§19 β衰变理论

用碰撞矩阵的微扰论的展开式(14.28)也可以处理衰变问题. 一个最有代表性的衰变问题是β衰变. 这个衰变的过程为

$$n\to p+e^-+\tilde{\nu}; \tag{19.1}$$

式中 n 和 p 代表中子和质子, e^- 代表负电子, $\tilde{\nu}$ 代表一个质量为零的狄拉克粒子. 狄拉克场的粒子和反粒子本来是相对的命名. 在习惯上我们称上式中最后一项所代表的粒子为反中微子. 符号 $\tilde{\nu}$ 上面的弯线代表反粒子. 由(19.1)我们看到β衰变代表四种狄拉克场间的相互作用. 像前面所讨论的相互作用一样, 我们要求这个相互作用必须是正洛伦兹变换下的不变量, 并且满足电荷守恒条件. 因此这个相互作用的最普遍的形式可写为

$$\mathscr{L}_{\text{相互}} = \sum_{i=1}^{5} g_i \bar{\psi}_p O_i \psi_n \bar{\psi}_e (O_i + C_i \gamma_5 O_i) \psi_\nu + \text{h. c.}, \tag{19.2}$$

式中 $\psi_p, \psi_n, \psi_e, \psi_\nu$ 分别代表质子,中子,电子和中微子场的算符,

$$O_i = 1, \gamma_\mu, \frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu), \gamma_5 \gamma_\mu, \gamma_5; \tag{19.3}$$

g_i 和 C_i 是参数. h. c. 代表上式右边第一项的厄米共轭,即

$$\text{h. c.} = \sum_{i=1}^{5} g_i^* \bar{\psi}_n \gamma_4 O_i^\dagger \gamma_4 \psi_p \bar{\psi}_\nu \gamma_4 (O_i^\dagger + C_i^* O_i^\dagger \gamma_5) \gamma_4 \psi_e . \tag{19.4}$$

由(19.2)给出的五种 O_i 分别代表标量,矢量,张量,赝矢量和赝标量五种类型的相互作用. 将(19.3)代入(19.2)式中后,凡重复的标数 μ, ν 应代表由 1 到 4 的求和. 如果要求(19.2)在全洛伦兹变换下具有不变性,则将包括在空间反演下的不变性,这时(19.2)式中的 C_i 必须等于零,即

$$\mathscr{L}_{\text{相互}} = \sum_{i=1}^{5} g_i \bar{\psi}_p O_i \psi_n \bar{\psi}_e O_i \psi_\nu + \text{h. c.}. \tag{19.5}$$

在 1956 年以前通常认为(19.5)是最普遍的 β 衰变相互作用的形式. (19.5)式是洛伦兹变换下的标量. (19.5)式在空间反演下的不变性意味着由此推导出的 β 衰变将是宇称守恒的. 在 1956 年李政道和杨振宁鉴于实验上有迹象表明在 K 介子衰变的过程里,宇称是不守恒的,因而指出,β 衰变作用可能由(19.2)式而不是由(19.5)式给出. 在空间反演下(19.2)变为

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\text{相互}} \to \mathscr{L}'_{\text{相互}} &= P \mathscr{L}_{\text{相互}} P^{-1} \\ &= \sum_{i=1}^{5} g_i \bar{\psi}_p O_i \psi_n \bar{\psi}_e (O_i - C_i \gamma_5 O_i) \psi_\nu + \text{h. c.} \end{aligned} \tag{19.6}$$

上式和(19.2)式的差别仅在于含 C_i 项的符号相反. 这说明(19.2)式中不含 C_i 的项是一个标量,而含 C_i 的项则是一个赝标量. 由(19.6)式得

$$[P, \mathscr{L}_{\text{相互}}] \neq 0.$$

即在 β 衰变作用下,P 不可能是对角的,也就是说宇称不可能是守恒的. 下面的计算将具体地显示这一点. 李政道和杨振宁的理论不久即为吴健雄对 ^{60}Co 的 β 衰变现象的观察所证实. 所以,现在看来,β 衰变作用的正确的普遍形式应由(19.2)而不是由(19.5)给出.

下面我们将利用(14.28)式,由(19.2)式算出过程(19.1)的最低级的微扰矩阵元. 我们必须把(14.28)中的电磁作用常数 e 换成 β 作用常数 g_i,由实验测定的 g_i 是非常小的量,所以最低级的微扰已能给出很准确的结果. 我们得

$$\begin{aligned} {}_0\langle \boldsymbol{p}_p r, \boldsymbol{p}_e s, \boldsymbol{p}_\nu t | S | \boldsymbol{p}_n q \rangle_0 = & \langle 0 | a_{pr}(\boldsymbol{p}_p) a_{es}(\boldsymbol{p}_e) a_{\nu t}(\boldsymbol{p}_\nu) \\ & \times \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x \sum_{i=1}^{5} g_i \bar{\psi}_p^{(-)}(x) O_i \psi_n^{(-)}(x) \bar{\psi}_e^{(-)}(x) [O_i + C_i \gamma_5 O_i] \psi_\nu^{(+)}(x) \end{aligned}$$

$$\times a_{nq}^{*}(\boldsymbol{p}_n)|0\rangle. \tag{19.7}$$

式中 $\boldsymbol{p}_p, \boldsymbol{p}_e, \boldsymbol{p}_\nu, \boldsymbol{p}_n$ 代表相应粒子的动量，r, s, t, q 代表自旋. $a_{pr}(\boldsymbol{p}_p), a_{nq}^*(\boldsymbol{p}_n)$等代表相应粒子的吸收和放出算符.

在进行下一步的计算以前，我们必须给出 $\psi_\nu(x)$的展开式. 由(8.22)，(8.3)和(8.5)我们看到(8.22)中的因子$\sqrt{\mu}$(μ=质量)和 $u_r(\boldsymbol{k})$及 $v_r(\boldsymbol{k})$的归一因子 N 中的因子 $1/\sqrt{\mu}$相抵消. 所以，当质量趋于零时并不造成困难. 于是对于中微子，我们有

$$\begin{aligned}
\psi_\nu &= \psi_\nu^{(-)} + \psi_\nu^{(+)}, \quad \bar{\psi}_\nu = \bar{\psi}_\nu^{(-)} + \bar{\psi}_\nu^{(+)}, \\
\psi_\nu^{(-)} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{t=\pm 1/2} \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{p}_\nu a_t(\boldsymbol{p}_\nu) u_{\nu t}(\boldsymbol{p}_\nu) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_\nu, x)}, \\
\psi_\nu^{(+)} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{t=\pm 1/2} \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{p}_\nu b_t^*(\boldsymbol{p}_\nu) v_{\nu t}(\boldsymbol{p}_\nu) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_\nu, x)}, \\
\bar{\psi}_\nu^{(-)} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{t=\pm 1/2} \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{p}_\nu b_t(\boldsymbol{p}_\nu) \bar{v}_{\nu t}(\boldsymbol{p}_\nu) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_\nu, x)}, \\
\bar{\psi}_\nu^{(+)} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{t=\pm 1/2} \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{p}_\nu a_t^*(\boldsymbol{p}_\nu) \bar{u}_{\nu t}(\boldsymbol{p}_\nu) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_\nu, x)}.
\end{aligned} \tag{19.8}$$

式中 $a_t(\boldsymbol{p}_\nu), a_t^*(\boldsymbol{p}_\nu)$为自旋分量为 t、动量为 $\boldsymbol{p}_\nu$ 的中微子 ν 的吸收和放出算符，$b_t(\boldsymbol{p}_\nu), b_t^*(\boldsymbol{p}_\nu)$为反中微子 $\bar{\nu}$ 的相应算符，

$$u_{\nu t}(\boldsymbol{p}_\nu) = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \varphi_t \\ \dfrac{(\boldsymbol{\sigma p}_\nu)}{p_\nu} \varphi_t \end{bmatrix}, \quad v_{\nu t}(\boldsymbol{p}_\nu) = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \dfrac{(\boldsymbol{\sigma p}_\nu)}{p_\nu} \varphi_{-t} \\ \varphi_{-t} \end{bmatrix}, \tag{19.9}$$

算符 $\bar{\psi}_p^{(\mp)}, \psi_n^{(\pm)}$ 可由电子的相应算符(8.22)通过代换 $\mu \to m_p, m_n, \boldsymbol{k} \to \boldsymbol{p}_p, \boldsymbol{p}_n, k_0 \to p_{p0}, p_{n0}$和 $s \to r, q$ 得出. 利用(15.38)的第二和第四式，(19.7)变为

$$\begin{aligned}
{}_0\langle |\boldsymbol{p}_p r, \boldsymbol{p}_e s, \boldsymbol{p}_\nu t| S |\boldsymbol{p}_n q\rangle_0 = \mathrm{i} \frac{\sqrt{m_p m_n m_e}}{(2\pi)^2 \sqrt{p_{p0} p_{n0} p_{e0}}} \delta^4(p_p + p_e + p_\nu - p_n) \\
\times \sum_{i=1}^{5} g_i [\bar{u}_{pr}(\boldsymbol{p}_p) O_i u_{nq}(\boldsymbol{p}_n)][\bar{u}_{es}(\boldsymbol{p}_e)(O_i \\
+ C_i \gamma_5 O_i) v_{\nu t}(\boldsymbol{p}_\nu)],
\end{aligned} \tag{19.10}$$

在得出上式时，我们曾利用下列等式

$$\int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_p + p_e + p_\nu - p_n, x)} = (2\pi)^4 \delta^4(p_p + p_e + p_\nu - p_n).$$

下面我们将首先计算 $\bar{u}_{pr}(\boldsymbol{p}_p) O_i u_{nq}(\boldsymbol{p}_n)$. 按照通常习惯，用 O_S, O_V, O_T, O_A, O_P 代表由(19.3)给出的五种 O_i 的式子. 取中子为静止的坐标，则 $\boldsymbol{p}_n = 0, p_{n0} = m_n$，由于在衰变过程中所涉及能量都比质子的静止质量小得多，我们可以忽略去含有 $1/m_p$ 的项. 于是我们有

$$u_{pr}(\boldsymbol{p}_p) = \sqrt{\frac{p_{p0}+m_p}{2m_p}}\begin{bmatrix}\varphi_r \\ \frac{(\boldsymbol{\sigma p}_p)}{p_{p0}+m_p}\varphi_r\end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix}\varphi_r \\ 0\end{bmatrix},$$
$$u_{nq}(\boldsymbol{0}) = \begin{bmatrix}\varphi_q \\ 0\end{bmatrix}. \tag{19.11}$$

于是

$$\bar{u}_{pr}(\boldsymbol{p}_p)O_S u_{nq}(\boldsymbol{0}) \cong \delta_{rq}, \tag{19.12a}$$

$$\bar{u}_{pr}(\boldsymbol{p}_p)O_V u_{nq}(\boldsymbol{0}) = \bar{u}_{pr}\gamma_\mu u_{nq} \cong \begin{cases}0, & 当\ \mu \neq 4, \\ \delta_{rq}, & 当\ \mu = 4,\end{cases} \tag{19.12b}$$

$$\bar{u}_{pr}(\boldsymbol{p}_p)O_T u_{nq}(\boldsymbol{0}) = \bar{u}_{pr}\frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)u_{nq}$$
$$\cong \begin{cases}0, & 当\ \mu\ 或\ \nu = 4, \\ \varphi_r^+\sigma_{ij}\varphi_q, & 当\ \mu = i \neq 4, \nu = j \neq 4,\end{cases} \tag{19.12c}$$

$$\bar{u}_{pr}(\boldsymbol{p}_p)O_A u_{nq}(\boldsymbol{0}) = \bar{u}_{pr}\gamma_5\gamma_\mu u_{nq} = \begin{cases}0, & 当\ \mu = 4, \\ -\mathrm{i}\varphi_r^+\sigma_i\varphi_q, & 当\ \mu = i \neq 4,\end{cases} \tag{19.12d}$$

$$\bar{u}_{pr}(\boldsymbol{p}_p)O_P u_{nq}(\boldsymbol{0}) = \bar{u}_{pr}\gamma_5 u_{nq} \cong 0. \tag{19.12e}$$

从上面结果,我们看到(19.10)可写为

$$\begin{aligned}{}_0\langle \boldsymbol{p}_p r, \boldsymbol{p}_e s, \boldsymbol{p}_\nu t|S|\boldsymbol{0}q\rangle_0 = {} & \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{m_e}{p_{e0}}}\delta^4(p_p + p_e + p_\nu - p_n) \\ & \times\{g_S\delta_{rq}\bar{u}_{es}(\boldsymbol{p}_e)(1+C_S\gamma_5)v_{\nu t}(\boldsymbol{p}_\nu) \\ & + g_V\delta_{rq}\bar{u}_{es}(\boldsymbol{p}_e)(1+C_V\gamma_5)\gamma_4 v_{\nu t}(\boldsymbol{p}_\nu) \\ & + g_T\sum_{i,j=1}^{3}\varphi_r^+\sigma_{ij}\varphi_q\bar{u}_{es}(\boldsymbol{p}_e)(1+C_T\gamma_5)\sigma_{ij}v_{\nu t}(\boldsymbol{p}_\nu) \\ & - \mathrm{i}g_A\sum_{i=1}^{3}\varphi_r^+\sigma_i\varphi_q\bar{u}_{es}(\boldsymbol{p}_e)(1+C_A\gamma_5)\gamma_4\sigma_i v_{\nu t}(\boldsymbol{p}_\nu)\}.\end{aligned} \tag{19.13}$$

用(19.9)式和

$$\bar{u}_{es} = \sqrt{\frac{p_{e0}+m_e}{2m_e}}\left(\varphi_s^+, -\varphi_s^+\frac{(\boldsymbol{\sigma p}_e)}{p_{e0}+m_e}\right)$$

代入(19.13),我们得

$$\begin{aligned}\bar{u}_{es}(\boldsymbol{p}_e)(1+C_S\gamma_5)v_{\nu t}(\boldsymbol{p}_\nu) = {} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_{e0}+m_e}{m_e}}\varphi_s^+\Big[\frac{(\boldsymbol{\sigma p}_\nu)}{p_\nu} - \frac{(\boldsymbol{\sigma p}_e)}{p_{e0}+m_e} \\ & - C_S + C_S\frac{(\boldsymbol{\sigma p}_e)(\boldsymbol{\sigma p}_\nu)}{(p_{e0}+m_e)p_\nu}\Big]\varphi_{-t},\end{aligned} \tag{19.14a}$$

$$
\begin{aligned}
u_{es}(\boldsymbol{p}_e)(1+C_V\gamma_5)\gamma_4 v_{\nu t}(\boldsymbol{p}_\nu) = {} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_{e0}+m_e}{m_e}} \\
& \times \varphi_s^{+}\left[\frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}_\nu)}{p_\nu}+\frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}_e)}{p_{e0}+m_e}\right. \\
& \left. +C_V+C_V\frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}_e)(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}_\nu)}{(p_{e0}+m_e)p_\nu}\right]\varphi_{-t},
\end{aligned} \tag{19.14b}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{u}_{es}(\boldsymbol{p}_e)(1+C_T\gamma_5)\sigma_{ij} v_{\nu t}(\boldsymbol{p}_\nu) = {} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_{e0}+m_e}{m_e}} \\
& \times \varphi_s^{+}\left[\sigma_{ij}\frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}_\nu)}{p_\nu}-\frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}_e)}{p_{e0}+m_e}\sigma_{ij}-C_T\sigma_{ij}\right. \\
& \left. +C_T\frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}_e)\sigma_{ij}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}_\nu)}{(p_{e0}+m_e)p_\nu}\right]\varphi_{-t},
\end{aligned} \tag{19.14c}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{u}_{es}(\boldsymbol{p}_e)(1+C_A\gamma_5)\gamma_4\sigma_i v_{\nu t}(\boldsymbol{p}_\nu) = {} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_{e0}+m_e}{m_e}} \\
& \times \varphi_s^{+}\left[\sigma_i\frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}_\nu)}{p_\nu}+\frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}_e)}{p_{e0}+m_e}\sigma_i\right. \\
& \left. +C_A\sigma_i+C_A\frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}_e)\sigma_i(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}_\nu)}{(p_{e0}+m_e)p_\nu}\right]\varphi_{-t}.
\end{aligned} \tag{19.14d}
$$

在得出上式时我们所用的狄拉克矩阵的具体表象为

$$
\gamma_4=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad \gamma_i=\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\sigma_i\\ \mathrm{i}\sigma_i & 0\end{bmatrix},
$$

$$
\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\quad \sigma_i=\begin{bmatrix}\sigma_i & 0\\ 0 & \sigma_i\end{bmatrix}. \tag{19.15}
$$

其中 σ_i 和 $\sigma_{ij}=-\sigma_{ji}$ 的关系为：$\sigma_{12}=\mathrm{i}\sigma_3, \sigma_{23}=\mathrm{i}\sigma_1, \sigma_{31}=\mathrm{i}\sigma_2$. 我们注意到在(19.14a)中引入 $\boldsymbol{p}_e\to-\boldsymbol{p}_e$ 和 $C_S\to-C_V$ 即得出(19.14b)，同样在(19.14c)中引入 $\boldsymbol{p}_e\to-\boldsymbol{p}_e$ 和 $C_T\to-C_A$ 即得出(19.14d). 把上面结果代入(19.13)，我们可写

$$
\begin{aligned}
{}_0\langle \boldsymbol{p}_p r, \boldsymbol{p}_e s, \boldsymbol{p}_\nu t|S|\boldsymbol{0}q\rangle_0 = {} & \frac{\mathrm{i}}{2(2\pi)^2}\sqrt{\frac{m_e+p_{e0}}{2p_{e0}}}\delta^4(p_p+p_e+p_\nu-p_n) \\
& \times\left\{\delta_{rq}\sum_{\lambda=S,V}g_\lambda\varphi_s^{+}\left[\frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}_\nu)}{p_\nu}-\varepsilon_\lambda\frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}_e)}{p_{e0}+m_e}\right]\right. \\
& \times\left[1-\bar{C}_\lambda\frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}_\nu)}{p_\nu}\right]\varphi_{-t}\quad\sum_{i=1}^{3}(\varphi_r^{+}\sigma_i\varphi_q)\sum_{\lambda=T,A}g_\lambda\varphi_s^{+} \\
& \times\left[\sigma_i\frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}_\nu)}{p_\nu}-\varepsilon_\lambda\frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}_e)}{p_{e0}+m_e}\sigma_i\right] \\
& \left.\times\left[1-\bar{C}_\lambda\frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}_\nu)}{p_\nu}\right]\varphi_{-t}\right\},
\end{aligned} \tag{19.16}
$$

式中

$$\varepsilon_S = \varepsilon_T = +1,\quad \varepsilon_V = \varepsilon_A = -1,$$

$$\overline{C}_S = C_S,\quad \overline{C}_V = -C_V,\quad \overline{C}_T = C_T,\quad \overline{C}_A = -C_A,$$

在(19.16)式的右边括号{　}里的第一项代表核子自旋在衰变过程中不改变的情况，第二项给出核子的自旋改变时的情况. 当衰变的中子是一个原子核的组成部分时，这个中子的衰变即成为原子核的β衰变. 上述第一种情况即相应于原子核衰变时满足费米选择定则时的情况，第二种情况即相当于衰变满足伽莫夫-特勒(Gamow-Teller)选择定则时的情况.

由(19.16)式可以很容易地得出β衰变的跃迁几率. 当中子是原子核的一个组成部分时，(19.16)式中的 δ_{np} 和 $(\varphi_p^+\sigma_i\varphi_n)$ 应换为 $(\Psi_f^+\Psi_i)$ 和 $(\Psi_f^+\sigma_i\Psi_i)$，式中 Ψ_f 和 Ψ_i 代表末态和始态的原子核的波函数. 下面我们将以 M_F 和 $M_{GT}^{(i)}$ 分别代表这两个矩阵元. 这两个矩阵元分别描写遵循费米和伽莫夫-特勒两种选择定则时的情况.

下面两个矩阵

$$\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{19.17}$$

分别代表使沿 z 轴方向的自旋增加和减少1单位的算符. 现在我们考虑这种情况：Ψ_f 态沿 z 轴方向的自旋比 Ψ_i 态的小一个单位. 于是得

$$(\Psi_f^+\sigma_-\Psi_i) = M_{GT},\quad (\Psi_f^+\sigma_+\Psi_i) = (\Psi_f^+\sigma_3\Psi_i) = 0.$$

由上式得

$$M_{GT}^{(1)} = (\Psi_f^+\sigma_1\Psi_i) = (\Psi_f^+\sigma_+\Psi_i) + (\Psi_f^+\sigma_-\Psi_i) = M_{GT},$$
$$M_{GT}^{(2)} = (\Psi_f^+\sigma_2\Psi_i) = (\Psi_f^+ i\sigma_-\Psi_i) - (\Psi_f^+ i\sigma_+\Psi_i) = iM_{GT},$$
$$M_{GT}^{(3)} = 0. \tag{19.18}$$

代入(19.16)式得

$$\begin{aligned}
{}_r\langle f, \boldsymbol{p}_e s, \boldsymbol{p}_\nu t|S|i\rangle_0 = {} & \frac{i}{2(2\pi)^2}\sqrt{\frac{m+E}{2E}}\delta^4(p_p + p_e + p_\nu - p_n) \\
& \times \Big\{ M_F \sum_{\lambda=S,V} g_\lambda \varphi_s^+ \Big[(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{v}) - \varepsilon_\lambda \frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}_e)}{E+m}\Big][1 - \overline{C}_\lambda(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{v})]\varphi_{-t} \\
& - M_{GT} \sum_{\lambda=T,A} g_\lambda \varphi_s^+ \Big[\sigma_+(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{v}) - \varepsilon_\lambda \frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}_e)}{E+m}\sigma_-\Big] \\
& \times [1 - \overline{C}_\lambda(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{v})]\varphi_{-t}\Big\}.
\end{aligned} \tag{19.19}$$

式中

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}_\nu/p_\nu,\quad m = m_e,\quad E = p_{e0}.$$

引进定义

$$ {}_0\langle f, \boldsymbol{p}_e s, \boldsymbol{p}_\nu t | S | i \rangle_0 = \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{E+m}{8E}} \delta^4 (p_p + p_e + p_\nu - p_n) \langle f | M | i \rangle , $$

并用处理康普顿散射问题时所用的考虑，我们得单位时间内的跃迁几率为

$$ w = \iiint \mathrm{d}^3 \boldsymbol{p}_p \mathrm{d}^3 \boldsymbol{p}_e \mathrm{d}^3 \boldsymbol{p}_\nu \frac{E+m}{8E} \delta^4 (p_p + p_e + p_\nu - p_n) | \langle f | M | i \rangle |^2 . \quad (19.20) $$

再除以 $\rho = 1/(2\pi)^3$ 即得每个衰变的原子核或每个衰变的中子的衰变几率. 上述积分还应理解为包括对自旋 r, s, t 的求和.

由(19.19)得

$$ \begin{aligned} \sum_{s,t} | \langle f | M | i \rangle |^2 = & \sum_s |M_F|^2 \sum_{\lambda,\lambda' = S,V} g_\lambda^* g_{\lambda'} \Big\{ (1 + \bar{C}_\lambda^* \bar{C}_{\lambda'}) \\ & \times \varphi_s^+ \Big[1 + \varepsilon_\lambda \varepsilon_{\lambda'} \frac{p_e^2}{(E+m)^2} - \varepsilon_\lambda \frac{(\boldsymbol{\sigma p}_e)(\boldsymbol{\sigma v})}{E+m} - \varepsilon_{\lambda'} \frac{(\boldsymbol{\sigma v})(\boldsymbol{\sigma p}_e)}{E+m} \Big] \varphi_s \\ & - (\bar{C}_\lambda^* + C_{\lambda'}) \varphi_s^+ \Big[(\boldsymbol{\sigma v}) - (\varepsilon_\lambda + \varepsilon_{\lambda'}) \frac{(\boldsymbol{\sigma p}_e)}{E+m} + \varepsilon_\lambda \varepsilon_{\lambda'} \frac{(\boldsymbol{\sigma p}_e)}{E+m} (\boldsymbol{\sigma v}) \frac{(\boldsymbol{\sigma p}_e)}{E+m} \Big] \varphi_s \Big\} \\ & + \sum_s |M_{GT}|^2 \sum_{\lambda,\lambda' = T,A} 4 g_\lambda^* g_{\lambda'} \Big\{ (1 + \bar{C}_\lambda^* \bar{C}_\lambda) \\ & \times \varphi_s^+ \Big[\sigma_+ \sigma_- + \varepsilon_\lambda \varepsilon_{\lambda'} \frac{(\boldsymbol{\sigma p}_e) \sigma_+ \sigma_- (\boldsymbol{\sigma p}_e)}{(E+m)^2} \\ & - \varepsilon_{\lambda'} \frac{(\boldsymbol{\sigma p}_e)}{E+m} \sigma_+ (\boldsymbol{\sigma v}) \sigma_- - \varepsilon_\lambda \sigma_+ (\boldsymbol{\sigma v}) \sigma_- \frac{(\boldsymbol{\sigma p}_e)}{(E+m)} \Big] \varphi_s \\ & - (\bar{C}_\lambda^* + \bar{C}_{\lambda'}) \Big[\sigma_+ (\boldsymbol{\sigma v}) \sigma_- - \varepsilon_{\lambda'} \frac{(\boldsymbol{\sigma p}_e)}{E+m} \sigma_+ \sigma_- - \varepsilon_\lambda \sigma_+ \sigma_- \frac{(\boldsymbol{\sigma p}_e)}{E+m} \\ & + \varepsilon_\lambda \varepsilon_{\lambda'} \frac{(\boldsymbol{\sigma p}_e)}{E+m} \sigma_+ (\boldsymbol{\sigma v}) \sigma_- \frac{(\boldsymbol{\sigma p}_e)}{E+m} \Big] \varphi_s \Big\} . \end{aligned} \quad (19.21) $$

在上式中我们曾对中微子的自旋 t 求和，并曾利用关系

$$ \sum_t \varphi_{-t} \varphi_{-t}^+ = 1 . $$

由(19.17)得

$$ \begin{aligned} \sigma_+ \sigma_- &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(1 + \sigma_3) , \\ \sigma_+ (\boldsymbol{\sigma v}) \sigma_- &= \begin{bmatrix} -\nu_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}(1 + \sigma_3) \nu_3 . \end{aligned} \quad (19.22) $$

进一步对电子的自旋 s 求和等于在(19.21)式中取 φ_s^+ 与 φ_s 之间的矩阵的对角项之和. 利用(19.22)得

$$ \sum_{s,t} | \langle f | M | i \rangle |^2 = |M_F|^2 \sum_{\lambda,\lambda' = S,V} g_\lambda^* g_{\lambda'} \Big\{ (1 + \bar{C}_\lambda^* C_{\lambda'}) $$

$$\times\left(1+\varepsilon_\lambda\varepsilon_{\lambda'}\frac{p_e^2}{(E+m)^2}-(\varepsilon_\lambda+\varepsilon_{\lambda'})\frac{(\boldsymbol{v}\boldsymbol{p}_e)}{E+m}\right)\Big\}$$

$$+|M_{GT}|^2\sum_{\lambda,\lambda'=T,A}4g_\lambda^* g_{\lambda'}\Big\{(1+\bar{C}_\lambda^* C_{\lambda'})\Big[1+\varepsilon_\lambda\varepsilon_{\lambda'}\frac{p_e^2}{(E+m)^2}$$

$$-(\varepsilon_\lambda+\varepsilon_{\lambda'})\frac{p_{e3}\nu_3}{E+m}\Big]+(\bar{C}_\lambda^*+\bar{C}_{\lambda'})\Big[\nu_3+(\varepsilon_{\lambda'}+\varepsilon_\lambda)$$

$$\times\frac{p_{e3}}{E+m}+\frac{\nu_3 p_e^2}{(E+m)^2}\Big]\Big\}. \tag{19.23}$$

§20　β衰变的电子-中微子角关联和电子角分布的上下方不对称性

在(19.20)式中进行对 p_p 的积分，给出 $\boldsymbol{p}_p=-\boldsymbol{p}_\nu-\boldsymbol{p}_e$. 于是

$$w=\int d^3\boldsymbol{p}_e\int d^3\boldsymbol{p}_\nu\frac{E+m}{8E}\delta\left(\sqrt{(\boldsymbol{p}_\nu+\boldsymbol{p}_e)^2+m_p^2}+\sqrt{p_e^2+m^2}+p_\nu-m_n\right)|\langle f|M|i\rangle|^2.$$

由于 $(\boldsymbol{p}_\nu+\boldsymbol{p}_e)^2\ll m_p^2$，我们可以忽略去质子的动量，引入 $E_0=m_n-m_p$，上式变为

$$w=\int d^3\boldsymbol{p}_e\int d^3\boldsymbol{p}_\nu\frac{E+m}{8E}\delta\left(\sqrt{p_e^2+m^2}+p_\nu-E_0\right)|\langle f|M|i\rangle|^2. \tag{20.1}$$

从上式我们看出 $\boldsymbol{p}_e$ 和 $\boldsymbol{p}_\nu$ 是两个可以有任意方向的矢量. 唯一的限制是它们的绝对值 p_ν 和 p_e 必须满足能量守恒条件

$$\sqrt{p_e^2+m^2}+p_\nu=E_0. \tag{20.2}$$

(20.1)式的积分元素可写为 $d^3\boldsymbol{p}_e=p_e^2dp_e d\Omega_e$，$d^3\boldsymbol{p}_\nu=p_\nu^2dp_\nu d\Omega_\nu$，$d\Omega_e$，$d\Omega_\nu$ 为立体角元. 在(20.1)中代入(19.23)，并对 $d\Omega_\nu$ 进行积分但保持 $\boldsymbol{p}_e$ 和 $\boldsymbol{p}_\nu$ 间的夹角χ 不变，我们得

$$w=\iiint p_e^2dp_e d\Omega_e p_\nu^2 dp_\nu d\cos\chi\,\delta\left(\sqrt{p_e^2+m^2}+p_\nu-E_0\right)$$

$$\times\frac{\pi}{4}\Big\{|M_F|^2\sum_{\lambda,\lambda'=S,V}g_\lambda^* g_{\lambda'}\Big[(1+\bar{C}_\lambda^*\bar{C}_{\lambda'})\Big(\frac{E+m}{E}+\varepsilon_\lambda\varepsilon_{\lambda'}\frac{(E-m)}{E}-(\varepsilon_\lambda+\varepsilon_{\lambda'})\frac{p_e}{E}\cos\chi\Big)\Big]$$

$$+|M_{GT}|^2\sum_{\lambda,\lambda'=T,A}g_\lambda^* g_{\lambda'}\Big[(1+\bar{C}_\lambda^*\bar{C}_{\lambda'})\Big(\frac{E+m}{E}+\varepsilon_\lambda\varepsilon_{\lambda'}\frac{E-m}{E}-(\varepsilon_\lambda+\varepsilon_{\lambda'})\frac{p_e}{3E}\cos\chi\Big)\Big]\Big\}. \tag{20.3}$$

在导出上式时，我们曾应用等式 $p_e^2/(E+m)^2=(E-m)/(E+m)$. 上式给出β衰变中电子和中微子的"角关联"，可以直接和实验比较. 我们将分别讨论下面几种情况：

(i) $M_{GT}=0, M_F\neq0, g_S\neq0, g_V=0$. 这时(20.3)式的被积函数为

$$f(\chi)=\frac{\pi}{2}|M_F|^2|g_S|^2(1+|C_S|^2)\Big[1-\frac{v}{c}\cos\chi\Big], \tag{20.4}$$

在导出上式时，我们曾用 $\varepsilon_s=1, p/E=v/c$.

(ii) $M_{GT}=0, M_F\neq0, g_S=0, g_V\neq0$，我们得

$$f(\chi)=\frac{\pi}{2}|M_F|^2|g_V|^2(1+|\bar{C}_V|^2)\left[1+\frac{v}{c}\cos\chi\right]. \tag{20.5}$$

(iii) $M_{GT}\neq0, M_F=0, g_T\neq0, g_A=0$ 给出

$$f(\chi)=\frac{\pi}{2}|M_{GT}|^2|g_T|^2(1+|\bar{C}_T|^2)\left[1-\frac{v}{3c}\cos\chi\right]. \tag{20.6}$$

(iv) $M_{GT}\neq0, M_F=0, g_T=0, g_A\neq0$ 给出

$$f(\chi)=\frac{\pi}{2}|M_{GT}|^2|g_A|^2(1+|\bar{C}_A|^2)\left[1+\frac{v}{3c}\cos\chi\right]. \tag{20.7}$$

对于大多数进行β衰变的原子核，M_F 和 M_{GT} 只有一个不等于零. 后面我们将指出 g_S 和 g_V 不可能同时不等于零. g_T 和 g_A 也不可能同时不等于零. 因此，上面所讨论的四种情况，就已完全包括所有可能的情况.

"角关联"$f(\chi)$是可以直接观察的. $\boldsymbol{p}_e$ 的方向可以直接测量. $\boldsymbol{p}_\nu$ 的方向可以利用动量守恒定律 $\boldsymbol{p}_\nu=-\boldsymbol{p}_e-\boldsymbol{p}_p$ 由电子的动量和末态原子核的动量求出. 实验的观察已经给出肯定的结论. 但在讨论这个观察的结果以前，我们将在下面先讨论电子分布的上下不对称现象.

如果在把(19.23)式代入(20.1)式中以后，固定 $\boldsymbol{p}_e$ 的方向，只对 $\boldsymbol{p}_\nu$ 进行积分，那么我们就得到：

$$\begin{aligned}w=\int p_e^2\mathrm{d}p_e\mathrm{d}\Omega_e(E_0-E)^2\Big\{&|M_F|^2\sum_{\lambda,\lambda'=S,V}g_\lambda^*g_{\lambda'}(1+\bar{C}_\lambda^*C_{\lambda'})\\&\times\frac{(E+m)\pi}{2E}\left(1+\varepsilon_\lambda\varepsilon_{\lambda'}\frac{E-m}{E+m}\right)\\&+|M_{GT}|^2\sum_{\lambda,\lambda'=T,A}g_\lambda^*g_{\lambda'}\frac{(E+m)\pi}{2E}\Big[(1+C_\lambda^*C_{\lambda'})\\&\times\left(1+\varepsilon_\lambda\varepsilon_{\lambda'}\frac{E-m}{E+m}\right)+(\bar{C}_\lambda^*+\bar{C}_{\lambda'})(\varepsilon_\lambda+\varepsilon_{\lambda'})\frac{p_{e3}}{E+m}\Big]\Big\}.\end{aligned} \tag{20.8}$$

由上式得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}E\mathrm{d}\Omega_e}=\pi pE(E_0-E)^2\Big\{&|M_F|^2\Big[g_S^*g_S(1+\bar{C}_S^*\bar{C}_S)+g_V^*g_V(1+\bar{C}_V^*\bar{C}_V)\\&+g_S^*g_V(1+\bar{C}_S^*\bar{C}_V)\frac{m}{E}+g_V^*g_S(1+\bar{C}_V^*\bar{C}_S)\frac{m}{E}\Big]\\&+|M_{GT}|^2\Big[g_T^*g_T(1+\bar{C}_T^*\bar{C}_T)+g_A^*g_A(1+\bar{C}_A^*\bar{C}_A)+g_T^*g_A(1+\bar{C}_T^*\bar{C}_A)\frac{m}{E}\\&+g_A^*g_T(1+\bar{C}_A^*\bar{C}_T)\frac{m}{E}\Big]\end{aligned}$$

$$+|M_{GT}|^2[g_T^* g_T(C_T^* + C_T) - g_A^* g_A(\bar{C}_A^* + \bar{C}_A)]\frac{p_{e3}}{E}\Big\}. \qquad (20.9)$$

从上式以及前面推导出的角关联 $f(\chi)$的式子,(20.4)—(20.7),我们看到把β衰变的作用拉氏函数密度由(19.5)换成(19.2)唯一实质的影响,是在上式中出现含 p_{e3}的项.这个改变对上式中其他项和对(20.4)—(20.7)式的影响只是把 $g_\lambda^* g_{\lambda'}$ 换成 $g_\lambda^* g_{\lambda'}(1+C_\lambda^* C_{\lambda'})$,由于 g_λ 本来就是待定的参数,因此这个改变不造成实质上的差异.

现在我们考察上式中含 p_{e3}项的物理意义.坐标轴 3 的方向实际上是始态中子或原子核的自旋方向.命 θ 为 $\boldsymbol{p}_e$ 和这个始态自旋方向间的夹角,于是 $p_{e3}=p_e\cos\theta$. 因为(20.9)式中含 p_{e3}的项只在 $M_{GT}\neq 0$ 时出现,所以只需要讨论以前处理角关联时的(iii),(iv)两种情况.我们得

$$\frac{d^2w}{dEd\Omega_e}=\pi pE(E_0-E)^2|M_{GT}|^2|g_\lambda|^2(1+|C_\lambda|^2)$$

$$\times\left[1+\varepsilon_\lambda\frac{\bar{C}_\lambda^*+\bar{C}_\lambda}{1+\bar{C}_\lambda^*\bar{C}_\lambda}\frac{v}{c}\cos\theta\right]. \quad (\lambda=T,A) \qquad (20.10)$$

当 $C_\lambda=1$ 时上式中 $\cos\theta$ 项达到最大值.我们得

$$\frac{d^2w}{dEd\Omega_e}=2\pi pE(E_0-E)^2|M_{GT}|^2|g_\lambda|^2\left(1+\varepsilon_\lambda\frac{v}{c}\cos\theta\right). \qquad (20.11)$$

上式表示,如果作一平面通过衰变的原子核的位置,并且垂直于自旋方向,那么从原点指向平面上方的方向(即 $\theta<\pi/2$)放出的电子数,与指向平面下方的方向(即 $\theta>\pi/2$)放出的电子数是不相等的.这就是所说电子分布的上下方不对称性.如果在实验上观察到这种上下方不对称性,那就不容争辩地证明了,导致β衰变的相互作用拉氏函数,应由(19.2)式而不是由(19.5)式给出.也就是说它不容争辩地证明了,在β衰变过程里,宇称是不守恒的.

取(20.9)式对 Ω_e 的积分,立刻给出

$$\frac{dw}{dE}=4\pi^2 pE(E_0-E)^2\Big\{|M_F|^2\Big[g_S^* g_S(1+\bar{C}_S^*\bar{C}_S)$$

$$+g_V^* g_V(1+C_V^* C_V)+g_S^* g_V(1+\bar{C}_S^* C_V)\frac{m}{E}$$

$$+g_V^* g_S(1+\bar{C}_V^*\bar{C}_S)\frac{m}{E}\Big]+|M_{GT}|^2[g_T^* g_T(1+\bar{C}_T^*\bar{C}_T)$$

$$+g_A^* g_A(1+\bar{C}_A^*\bar{C}_A)+g_T^* g_A(1+\bar{C}_T^*C_A)\frac{m}{E}$$

$$+g_A^* g_T(1+\bar{C}_A^* C_T)\frac{m}{E}\Big]\Big\}. \qquad (20.12)$$

这就是衰变电子的能谱. 它可以直接与实验结果比较. 式中 $g_S^* g_V$, $g_V^* g_S$, $g_T^* g_A$ 和 $g_A^* g_T$ 等交乘项称为菲尔兹(Fierz)项. 实验结果证明这些项是不存在的. 这就要求 g_S 和 g_V 中必须有一个为零,并且 g_T 和 g_A 中也必须有一个为零. 前面所述角关联的实验要求 $g_S = g_T = 0$. 关于电子上下方向分布的观察也要求 $C_A = -1$. 于是(19.2)可写为

$$\mathscr{L}_{相互} = \bar{\psi}_p(x)(g_V + g_A\gamma_5)\gamma_\mu\psi_n(x)\bar{\psi}_e(x)(1-\gamma_5)\gamma_\mu\psi_\nu + \text{h.c.}. \quad (20.13)$$

实验给出的 g_V 和 g_A 的值为

$$g_V = 6.5\times10^{-12}\frac{\hbar^3}{m_e c},$$
$$g_A = -1.12 g_V. \quad (20.14)$$

每一个进行β衰变的原子核的衰变几率为

$$\frac{w}{\rho} = (2\pi)^3 w = 2(2\pi)^5\int dE pE(E_0 - E)^2|M_\lambda|^2|g_\lambda|^2. \quad (20.14a)$$

为了用通用单位,即秒$^{-1}$表示,上式必须乘上一个单位转换因子 $\hbar/m_e c^2 = 8.06\times10^{-21}$秒. 这是由 $\hbar$, c 和 m_e 能够组成的量纲为时间的倒数的唯一的因子.

前面所述实验结果 $C_A = -1$ 的重要的后果,是在β作用中放出或吸收的反中微子的自旋方向,只可能与动量 $\boldsymbol{p}_\nu$ 平行. 同样,放出或吸收的中微子的自旋方向,只可能与 $\boldsymbol{p}_\nu$ 反平行. 为着说明这一点,引入下面场算符

$$\psi_\nu^{[-]}(x) = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi_\nu(x), \quad (20.15)$$

于是(20.13)式可写为

$$\mathscr{L}_{相互} = 2\bar{\psi}_p(x)(g_V + g_A\gamma_5)\gamma_\mu\psi_n(x)\bar{\psi}_e(x)\gamma_\mu\psi_\nu^{[-]}(x)$$
$$+ 2\bar{\psi}_n(x)(g_V^* + g_A^*\gamma_5)\gamma_\mu\psi_p(x)\bar{\psi}_\nu^{[-]}\gamma_5\gamma_\mu\psi_e(x). \quad (20.16)$$

由上式给出的β作用正是在没有发现宇称不守恒以前的形式(19.5)中,只有 g_V 和 g_A 不等于零的情形,但是,其中 $\psi_\nu(x)$ 被换为 $\psi_\nu^{[-]}(x)$. 下面我们将指出 $\psi_\nu^{[-]}(x)$ 场的粒子的自旋方向只可能与动量 $\boldsymbol{p}_\nu$ 的方向相反,反粒子的自旋方向只可能与 $\boldsymbol{p}_\nu$ 的方向相同. 由 γ_5 具体的矩阵表象(19.15)得

$$\frac{1}{2}(1+\gamma_5) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}, \quad (20.17)$$

相应于展开式(19.8),得

$$\psi_\nu^{[-]} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{t=-1/2}^{+1/2}\int d^3\boldsymbol{p}_\nu\{a_t(\boldsymbol{p}_\nu)u_{\nu t}^{[-]}(\boldsymbol{p}_\nu)e^{i(p_\nu x)} + b_t^*(\boldsymbol{p}_\nu)v_{\nu t}^{[-]}(\boldsymbol{p}_\nu)e^{-i(p_\nu x)}\},$$

$$\bar{\psi}_\nu^{[-]} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{t=-1/2}^{+1/2}\int d^3\boldsymbol{p}_\nu\{a_t^*(\boldsymbol{p}_\nu)\bar{u}_{\nu t}^{[-]}(\boldsymbol{p}_\nu)e^{-i(p_\nu x)} + b_t(\boldsymbol{p}_\nu)\bar{v}_{\nu t}^{[-]}(\boldsymbol{p}_\nu)e^{i(p_\nu x)}\},$$

(20.18)

式中

$$u_{\nu t}^{[-]}(\boldsymbol{p}_\nu) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} \varphi_t \\ \frac{(\boldsymbol{\sigma p}_\nu)}{p_\nu}\varphi_t \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}[1-(\boldsymbol{\sigma v})]\begin{bmatrix} \varphi_t \\ -\varphi_t \end{bmatrix}, \tag{20.19}$$

$$v_{\nu t}^{[-]}(\boldsymbol{p}_\nu) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} \frac{(\boldsymbol{\sigma p}_\nu)}{p_\nu}\varphi_{-t} \\ \varphi_{-t} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}[(\boldsymbol{\sigma v})-1]\begin{bmatrix} \varphi_{-t} \\ -\varphi_{-t} \end{bmatrix}, \tag{20.20}$$

式中 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{p}_\nu/p_\nu$. 由于 φ_t 和 φ_{-t} 满足下列关系：

$$(\boldsymbol{\sigma v})\varphi_t = 2t\varphi_t, \quad t=\pm 1/2,$$

我们得

$$u_{\nu,1/2}^{[-]}(\boldsymbol{p}_\nu) = 0, \quad u_{\nu,-1/2}^{[-]}(\boldsymbol{p}_\nu) = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} \varphi_{-1/2} \\ -\varphi_{-1/2} \end{bmatrix},$$

$$v_{\nu,1/2}^{[-]}(\boldsymbol{p}_\nu) = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} -\varphi_{-1/2} \\ \varphi_{-1/2} \end{bmatrix}, \quad v_{\nu,-1/2}^{[-]}(\boldsymbol{p}_\nu) = 0. \tag{20.21}$$

上式表示自旋为 1/2(平行于 $\boldsymbol{p}_\nu$)的中微子的波函数，和自旋为 −1/2(反平行于 $\boldsymbol{p}_\nu$)的反中微子的波函数都为零. 因此没有这些中微子的态. 我们还注意到上面波函数只有两个独立的分量 φ_t，所以 $\psi_\nu^{[-]}$ 又可称为二分量的中微子场算符. 顺便指出如果在(20.13)式中出现的因子是$(1-\gamma_5)$，那么(20.21)式应换为

$$u_{\nu,1/2}^{[+]}(\boldsymbol{p}_\nu) = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} \varphi_{1/2} \\ \varphi_{1/2} \end{bmatrix}, \quad u_{\nu,-1/2}^{[+]} = 0,$$

$$v_{\nu,1/2}^{[+]}(\boldsymbol{p}_\nu) = 0, \quad v_{\nu,-1/2}(\boldsymbol{p}_\nu) = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} \varphi_{1/2} \\ \varphi_{1/2} \end{bmatrix}. \tag{20.22}$$

由上式描写的中微子只可能有自旋与 $\boldsymbol{p}_\nu$ 平行的态，反中微子只可能有自旋与 $\boldsymbol{p}_\nu$ 反平行的态. 我们注意到粒子和反粒子是相对的名称. 如果交换中微子和反中微子的定义，由(20.21)描写的二分量中微子场即变为由(20.22)描写的场. 相应的相互作用拉氏函数密度应改为

$$\mathscr{L}_{相互} = 2\bar{\psi}_p(g_V + g_A\gamma_5)\gamma_\mu\psi_n\bar{\psi}_\nu^{[+]}\gamma_\mu\psi_{e^+} + \text{h.c.}. \tag{20.23}$$

在上式中正电子被看成粒子，通常的电子被看成反粒子. 这和我们通常的习惯恰恰相反. 为着保持通常的习惯，我们一般接受(20.16)为 β 作用的相互作用拉氏函数密度.

上述实验结果 $C_A = 1$ 对由β衰变放出的电子的自旋也有类似的效应.引入

$$\psi_e^{[-]} = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi_e . \tag{20.24}$$

(20.13)式可写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{相互} = & 2\bar{\psi}_p(x)(g_V + g_A\gamma_5)\gamma_\mu\psi_n(x)\bar{\psi}_e^{[-]}(x)\gamma_\mu\gamma_\nu(x) \\ & + 2\bar{\psi}_n(x)(g_V^* + g_A^*\gamma_5)\gamma_\mu\psi_p(x)\psi_\nu(x)\gamma_\mu\psi_e^{[-]}(x).\end{aligned} \tag{20.25}$$

相应于(20.18),现在有

$$\psi_e^{[-]} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_r\int d^3p\{a_r(p)u_r^{[-]}(p)e^{i(px)} + b_r^*(p)v_r^{[-]}(p)e^{-i(px)}\}, \tag{20.26}$$

式中

$$u_r^{[-]}(p) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}N\begin{bmatrix}\varphi_r\\ \dfrac{(\sigma p)}{E+m}\varphi_r\end{bmatrix}$$

$$= \frac{N}{2}\left(1-\frac{(\sigma p)}{E+m}\right)\begin{bmatrix}\varphi_r\\ -\varphi_r\end{bmatrix},$$

$$v_r^{[-]}(p) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}N\begin{bmatrix}\dfrac{(\sigma p)}{E+m}\varphi_{-r}\\ \varphi_{-r}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{N}{2}\left(\frac{(\sigma p)}{E+m}-1\right)\begin{bmatrix}\varphi_{-r}\\ -\varphi_{-r}\end{bmatrix}.$$

由于 φ_r 满足

$$(\sigma p)\varphi_r = 2rp\varphi_r ,$$

我们得

$$\begin{aligned}u_{1/2}^{[-]}(p) &= \frac{N}{2}\left(1-\frac{p}{E+m}\right)\begin{bmatrix}\varphi_{1/2}\\ -\varphi_{1/2}\end{bmatrix},\\ u_{-1/2}^{[-]}(p) &= \frac{N}{2}\left(1+\frac{p}{E+m}\right)\begin{bmatrix}\varphi_{-1/2}\\ -\varphi_{-1/2}\end{bmatrix},\\ v_{1/2}^{[-]}(p) &= -\frac{N}{2}\left(1+\frac{p}{E+m}\right)\begin{bmatrix}\varphi_{-1/2}\\ -\varphi_{-1/2}\end{bmatrix},\\ v_{-1/2}^{[-]}(p) &= -\frac{N}{2}\left(1-\frac{p}{E+m}\right)\begin{bmatrix}\varphi_{1/2}\\ -\varphi_{1/2}\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{20.27}$$

当 $p \gg m$ 时,由上式得

$$u_{-1/2}^{[-]}(p) \gg u_{1/2}^{[-]}(p),$$

$$v_{1/2}^{[-]}(p) \gg v_{-1/2}^{[-]}(p).$$

上式表示当 p 很大时，由 β 衰变放出的电子的自旋将主要的沿着 $-p$ 的方向，放出的正电子的自旋将主要的沿着 p 的方向. 此处的 $\psi_e^{[-]}(x)$ 和前面的 $\psi_\nu^{[-]}(x)$ 不同的地方是：$\psi_\nu^{[-]}(x)$ 满足 $\psi_\nu(x)$ 所满足的相同的场方程式，即

$$\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi_\nu^{[-]} = 0.$$

但 $\psi_e^{[-]}(x)$ 不满足 $m\neq 0$ 的狄拉克方程式，即

$$\left(\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi_e^{[-]} \neq 0.$$

这说明 $\psi_\nu^{[-]}(x)$ 可看作是代表一种独立的场，但 $\psi_e^{[-]}(x)$ 则不能看成是代表独立的场.

上述 β 衰变所产生电子的极化现象（即有较多的电子自旋平行或反平行于 p 的现象）已经在实验上得到证实.

由(20.14)给出的 g_A 非常接近于 $-g_V$. 如果我们命 $g_A=-g_V$，(20.13)即可写为

$$\mathscr{L}_{相互} = g\bar{\psi}_p(1-\gamma_5)\gamma_\mu\psi_n\bar{\psi}_e(1-\gamma_5)\gamma_\mu\psi_\nu, \tag{20.28}$$

式中 $g=g_V$ 在 $\hbar=c=m_e=1$ 的单位系统中的值为 6.5×10^{-12}. (20.14)式所给出的 g_V 和 g_A 值的差别可以解释为核子与 π 介子间的强作用的影响. 在上式中包括 ψ_p 和 ψ_n 的因子与包括 ψ_e 和 ψ_ν 的因子具有相同的形式. 引入符号

$$(A,B) \equiv \bar{\psi}_A(1-\gamma_5)\gamma_\mu\psi_B. \tag{20.29}$$

(20.28)可写为

$$\mathscr{L}_{相互} = g(\mathrm{p},\mathrm{n})(\mathrm{e}^-,\nu) + \mathrm{h.c.}, \tag{20.30}$$

实验证实 μ 粒子的 β 衰变现象可由下列拉氏函数描写，

$$\mathscr{L}_{相互} = g(\nu,\mu^-)(\mathrm{e}^-,\nu) + \mathrm{h.c.}, \tag{20.31}$$

μ 俘获的实验也指出 μ 粒子和核子间存在着相互作用

$$\mathscr{L}_{相互} = g(\mathrm{p},\mathrm{n})(\mu^-,\nu) + \mathrm{h.c.}, \tag{20.32}$$

在相互作用(20.30)，(20.31)和(20.32)中，作用常数 g 值都是相同的. 并且 p，n，e^-，μ^-，ν 都被看作反粒子. 上面所给的有中微子参加的三种相互作用的形式称为普适的费米型相互作用. 这种普适作用和实验的相符表明，在涉及中微子的衰变作用里，存在着一种新的对称性.

第五章　强相互作用理论

§21　π 介子和核子间的强相互作用

存在于各种物质场间的相互作用共可分为四种：

(i) 强相互作用

(ii) 电磁相互作用

(iii) 弱相互作用

(iv) 万有引力作用

万有引力和电磁作用是人们最早认识到的两种相互作用. 只有在质量很大的物体之间才能够比较显著地觉察到万有引力，因此，在微观领域内可以完全地忽略它. 电磁作用是所有宏观力的起源. 所有物质内部的张力，分子间的化学结合力，物体和物体之间接触作用力以及原子内电子和原子核的吸引力都是由电磁相互作用力所造成的. 标志着电磁作用强度的常数是精细结构常数 $\alpha=e^2/\hbar c=1/137$. 在 $\hbar=c=1$ 的单位系统里，$\sqrt{\alpha}$正是电磁作用常数(电荷).

弱相互作用是导致各种基本粒子衰变的作用. 其中包括奇异粒子的衰变和 β 衰变. 所有弱作用的作用常数都差不多是属于同一数量级的. 在 $\hbar=c=m_e=1$ 的单位中，这个作用常数约为 $g\approx10^{-11}$. 上述作用常数的数量级的相同，以及在所有弱相互作用中都存在着宇称不守恒现象，表明弱相互作用中应该存在着一个统一的机构. 在目前这个统一的机构尚未被发现. 一度认为有希望的，唯象的描绘这一机构的，普适费米作用理论现在遇到一些严重的困难. 为着找出这个相互作用机构，我们必须在实验上和理论上进行更多的工作.

强相互作用最初为人们所注意是通过对核力的研究. 1935 年汤川秀树首次指出核力是由介子和核子间的强相互作用所造成的[①]. 在以后的十年里，人们错误地认为，在宇宙射线中发现的 μ 粒子就是汤川所提出的介子. 但进一步的实验发现，μ 粒子和核子间的相互作用是很弱的，不可能造成足够强的核力. 直至 1947 年鲍威尔(Powell)等人在乳胶中发现了比 μ 粒子更重的 π 介子后[②]，这个困难才得到解决. 在 1948 年，首次由加速器产生了人工的 π 介子. 通过 π 介子和核子散射的实

① H. Yukawa (1935) *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* **17** 48.

② Lattes, Occhialini and Powell (1947) *Nature* **160** 453, 486.

验，人们看到 π 介子和核子间的作用的确是很强的.

在§4中我们曾指出带正负电荷和中性的三种 π 介子可以看作是同一个粒子的不同电荷的态.同样，中子和质子也可看作核子的不同电荷的态.这些不同电荷的态可称为电荷多重态.它们除电荷不同外，其他的性质都是几乎完全相同的.事实上 π^0 的质量比 π^+ 和 π^- 小3%，中子和质子的质量也仅有微小的差异.这些质量差可以解释为由于电磁作用所造成的质量改变.

上述电荷多重态可以和我们所熟知的角动量多重态相比拟.我们知道，氢原子就具有一系列的角动量多重态.根据非相对论量子理论，所有总角动量 L 相同，但沿 z 轴方向角动量 L_z 不同的氢原子的激发态都具有相同的能级.这些态在光谱学里称为角动量多重态.这正像我们这里的电荷多重态一样.

一个系统具有不同角动量的态是由于这个系统在普通空间的旋转自由度所产生.同样，我们也可以把 π 介子和核子具有电荷多重态看成是由于它们在一个新的三维空间里的旋转自由度所产生.这个新的三维空间一般称为同位旋空间.一个粒子的电荷多重态即可看成它在同位旋空间里的角动量多重态.比如质子和中子可以看成同位旋角动量等于1/2的二重态，π^+，π^- 和 π^0 可以看成同位旋角动量等于1的三重态，用 I 代表同位旋空间的角动量，I_3 代表这个角动量沿 z 方向的分量，我们可以列出下表.从下表

粒子	I	I_3	电荷
质子，p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	e
中子，n	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
π^+	1	1	e
π^0	1	0	0
π^-	1	-1	$-e$

我们看到不同的 I_3 相应于不同的电荷 Q.对于介子 $Q=eI_3$，但对于核子 $Q=e(I_3+1/2)$.反粒子的 Q 和 I_3 值与粒子的相反.在同位旋角动量的表象里，质子和中子的波函数可写为

$$\chi_p=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \chi_n=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}. \tag{21.1}$$

同位旋角动量算符 I_ρ 可写为

$$I_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad I_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix},\quad I_3=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}. \tag{21.2}$$

引入

$$I_+ = I_1 + \mathrm{i}I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$I_- = I_1 - \mathrm{i}I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{21.3}$$

我们得

$$\begin{aligned} &I_+ \chi_n = \chi_p, \quad I_+ \chi_p = 0, \\ &I_- \chi_p = \chi_n, \quad I_- \chi_n = 0, \end{aligned} \tag{21.4}$$

即 I_+ 是把n(中子)转化为p(质子)的算符，I_- 是把p转化为n的算符.类似地，π^+，π^0，π^- 的同位旋波函数可写为

$$\chi_{\pi^+} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \chi_{\pi^0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \chi_{\pi^-} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{21.5}$$

相应的同位旋角动量算符为

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{21.6}$$

引入

$$\begin{aligned} I_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(I_1 + \mathrm{i}I_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ I_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(I_1 - \mathrm{i}I_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{21.7}$$

我们很容易证明

$$\begin{aligned} &I_+ \chi_{\pi^+} = 0, \quad I_+ \chi_{\pi^0} = \chi_{\pi^+}, \quad I_+ \chi_{\pi^-} = \chi_{\pi^0}, \\ &I_- \chi_{\pi^+} = \chi_{\pi^0}, \quad I_- \chi_{\pi^0} = \chi_{\pi^-}, \quad I_- \chi_{\pi^-} = 0. \end{aligned} \tag{21.8}$$

即 I_+ 代表增加一个单位电荷的算符，I_- 代表减少一个单位电荷的算符.

像普通角动量的情形一样，同位旋角动量等于1的波函数可以用球函数来表示，

$$\chi_{\pi^+} = Y_1^1(\theta,\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \mathrm{i}\eta),$$

$$\chi_{\pi^0} = Y_1^0(\theta,\varphi) = \zeta,$$
$$\chi_{\pi} = Y_1^{-1}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \mathrm{i}\eta), \tag{21.9}$$

(ξ,η,ζ)代表在同位旋空间里沿着方向 θ,φ 的单位矢量的三个分量. 相应的同位旋算符可写为

$$I_1 = -\mathrm{i}\left(\eta\frac{\partial}{\partial\zeta} - \zeta\frac{\partial}{\partial\eta}\right),\quad I_2 = -\mathrm{i}\left(\zeta\frac{\partial}{\partial\xi} - \xi\frac{\partial}{\partial\zeta}\right),\quad I_3 = -\mathrm{i}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial}{\partial\xi}\right). \tag{21.10}$$

上面给出的各种粒子的同位旋表象即可取为相应场算符在同位旋空间的表象. 由(21.9)我们可写

$$\varphi_{\pi^-}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(\boldsymbol{r},t) + \mathrm{i}\varphi_2(\boldsymbol{r},t)]^{①},$$
$$\varphi_{\pi^+}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(\boldsymbol{r},t) - \mathrm{i}\varphi_2(\boldsymbol{r},t)]. \tag{21.11}$$

$\varphi_{\pi^+}(\boldsymbol{r},t)$代表吸收一个 π^+ 或放出一个 π^- 的算符, $\varphi_{\pi^-}(\boldsymbol{r},t)$代表吸收一个 π^- 或放出一个 π^+ 的算符. 通过上式我们可把 φ_1 和 φ_2 看成两种"中性"介子(即在经典理论中用实波函数描写的场)π_1 和 π_2 的吸收和放出算符. 我们再引入 $\varphi_3(\boldsymbol{r},t)$作为中性介子的吸收和放出算符. 由(21.9)我们看到 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 正好是同位旋空间里一个矢量的分量. 这表示 π 介子是同位旋空间的矢量.

像普通空间的角动量一样, 两个同位旋角动量也可以相加. 命χ_I^m 和$\chi_{I'}^{m'}$ 为两个同位旋波函数. 由这两个波函数可以构成总同位旋角动量为 $T=I+I', I+I'-1, \cdots, |I-I'|$的态 ψ_T^M. 它们之间的关系为

$$\chi_I^m\chi_{I'}^{m'} = \sum_{T=|I-I'|}^{I+I'} C_{II'mm';Tm+m'}\psi_T^{m+m'},$$
$$\psi_T^M = \sum_{m=-I}^{I} C_{II'm,M-m;TM}\chi_I^m\chi_{I'}^{M-m}, \tag{21.12}$$

式中 $C_{II'mm';TM}$为 CG(Clebsch-Gordan)系数. 作为一个例子, 我们可以考虑由一个 π 介子和一个核子所组成的系统. 这个系统的同位旋角动量的本征态可有

$$\psi_{1/2}^{1/2} = -\sqrt{\frac{1}{3}}\chi_1^0\chi_{1/2}^{1/2} + \sqrt{\frac{2}{3}}\chi_1^1\chi_{1/2}^{-1/2},$$
$$\psi_{1/2}^{-1/2} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\chi_1^{-1}\chi_{1/2}^{1/2} + \sqrt{\frac{1}{3}}\chi_1^0\chi_{1/2}^{-1/2},$$

① 这里的 $\varphi_{\pi^-}(\boldsymbol{r},t)$ 和通常的定义相差一个符号. 在应用有关 CG 系数的定理时, 必须采用我们所给的 $\varphi_{\pi^-}(\boldsymbol{r},t)$ 的式子.

$$
\begin{aligned}
&\psi_{3/2}^{3/2}=\chi_1^1\chi_{1/2}^{1/2},\quad \psi_{3/2}^{1/2}=\sqrt{\frac{2}{3}}\chi_1^0\chi_{1/2}^{1/2}+\sqrt{\frac{1}{3}}\chi_1^1\chi_{1/2}^{-1/2},\\
&\psi_{3/2}^{-3/2}=\chi_1^{-1}\chi_{1/2}^{-1/2},\quad \psi_{3/2}^{-1/2}=-\sqrt{\frac{1}{3}}\chi_1^{-1}\chi_{1/2}^{1/2}+\sqrt{\frac{2}{3}}\chi_1^0\chi_{1/2}^{-1/2}.
\end{aligned}
\tag{21.13}
$$

当一个量子力学系统的相互作用拉氏函数或哈密顿量是普通三维空间的标量时，那么所观察到的现象应与坐标轴方向的选择无关. 当系统具有确定的角动量 J 时，所有的观察结果都应与 J_z 无关. 当没有外磁场存在时，一个氢原子的电子和核子间的相互作用哈密顿量，

$$
V=-\frac{e^2}{r}
$$

是一个标量，因此氢原子的能级只与角动量 J 有关而与 J_z 无关. 每一个能级实际上包括 $2J+1$ 个多重态. 在强相互作用的现象里，我们发现许多现象与所考虑的系统的同位旋角动量分量 I_3 无关. 这就要求相应的相互作用哈密顿量或拉氏函数是同位旋空间的一个标量. 这即是所谓"电荷无关"的情况. 前面所述 π^-，π^0，π^+ 的质量非常接近即是"电荷无关"的一个表现. 严格地讲，由于电磁作用的存在，使得 π^+，π^-，π^0 有一定的质量上的差异，因此"电荷无关"只能是在忽略电磁效应时的近似情况.

在能够回答一个所给的相互作用拉氏函数是否是一个同位旋空间的标量以前，我们必须知道 χ_p，χ_n，χ_π 等在同位旋空间的坐标旋转下的变换性质. $\xi_\rho(\rho=1,2,3)$ 代表同位旋空间的直角坐标系中一个矢量的分量. 引入坐标旋转，这个矢量的分量变为 $\xi'_{\rho'}$. 我们得

$$
\xi'_{\rho'}=\sum_{\rho=1}^{3}A_{\rho'\rho}\xi_\rho,
\tag{21.14}
$$

式中 $A_{\rho'\rho}$ 是代表这个坐标旋转的正交变换.

很显然，作为同位旋空间矢量的 π 介子场算符 φ_ρ 的变换性质应为

$$
\varphi'_{\rho'}=\sum_{\rho=1}^{3}A_{\rho'\rho}\varphi_\rho.
\tag{21.15}
$$

我们还要找出在变换(21.14)下，由(21.1)式组成的代表核子场的算符

$$
\psi(\boldsymbol{r},t)=\psi_p(\boldsymbol{r},t)\chi_p+\psi_n(\boldsymbol{r},t)\chi_n=\begin{bmatrix}\psi_p(\boldsymbol{r},t)\\ \psi_n(\boldsymbol{r},t)\end{bmatrix}
\tag{21.16}
$$

的变换性质. 在量子力学里，二分量波函数最早是作为电子的自旋波函数而引入的. 在那里我们要求自旋角动量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的观察值必须是一个矢量. 在同位旋空间里，$\boldsymbol{\sigma}$ 应该由 I_ρ 替代. 引入 $I_\rho=\tau_\rho/2$（τ_ρ 和 σ_ρ 是相同的 2×2 泡利矩阵，只不过代表着不同的自由度）. 上面条件要求

$$
\bar{\psi}\tau_\rho\psi
$$

($\bar{\psi}=(\bar{\psi}_p,\bar{\psi}_n)$)必须是一个矢量的分量，即在同位旋空间坐标变换(21.14)下，上式的变换公式应为

$$\bar{\psi}'\tau_{\rho'}\psi' = \sum_{\rho=1}^{3} A_{\rho'\rho}\bar{\psi}\tau_\rho\psi. \tag{21.17}$$

为着满足这个条件，我们命 ψ 的变换公式为

$$\psi' = U\psi,\quad U = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{bmatrix},\quad \alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1, \tag{21.18}$$

即 U 代表一个幺正变换矩阵. 利用上式得

$$\bar{\psi}'\tau_\rho\psi' = \bar{\psi}U^+\tau_\rho U\psi. \tag{21.19}$$

比较(21.17)和(21.19)并注意 ψ 是任意的，我们得

$$U^+\tau_{\rho'}U = \sum_{\rho=1}^{3} A_{\rho'\rho}\tau_\rho. \tag{21.20}$$

对于任一坐标变换 $A_{\rho'\rho}$，我们可由上式决定相应的变换 U. 这样，在变换(21.18)下，(21.17)将是正确的. 这就保证了在变换(21.14)下 $\bar{\psi}\tau_\rho\psi$ 是一个矢量的分量.

上述条件是和§7 中的(7.7)式相似的. 不同的地方是，(21.6)式只涉及三维空间的坐标旋转，而且出现的矩阵是二行二列的，而不是四行四列的.

从上面结果我们看到，由核子和介子在同位旋空间的波函数所能组成的最简单的标量相互作用拉氏函数密度为

$$\mathscr{L}_1 = \mathrm{i}g_1\sum_{\rho=1}^{3}\bar{\psi}\gamma_5\tau_\rho\psi\varphi_\rho, \tag{21.21}$$

和

$$\mathscr{L}_2 = \mathrm{i}g_2\sum_{\rho=1}^{3}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\tau_\rho\psi\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varphi_\rho. \tag{21.22}$$

在(21.21)和(21.22)中出现了 γ_5，这是因为实验观察证明，π 介子场是一个普通时空中的赝标量场，在上两式中必须引入赝标量因子 $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ 和赝矢量因子 $\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$ 才能使得(21.21)和(21.22)两式是洛伦兹变换下的不变量. 由于这个原因，人们称(21.21)和(21.22)两式分别为赝标量耦合和赝矢量耦合. 很容易看出上面所给的两式都是同位旋空间的标量，因为(21.21)式代表两个同位旋矢量 $\bar{\psi}\gamma_5\tau_\rho\psi$ 和 φ_ρ 的内乘积，(21.22)式代表两个同位旋矢量 $\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\tau_\rho\psi$ 和 $\partial\varphi_\rho/\partial x_\mu$ 的内乘积. 上面给出的 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 只包含 φ_ρ 的一次因子，这种类型的 $\mathscr{L}_{相互}$ 通常称为汤川型相互作用.

利用(21.11)和(21.16)两式，(21.21)式又可写为

$$\mathscr{L}_1 = \mathrm{i}g_1\{(\bar{\psi}_p\gamma_5\psi_p - \bar{\psi}_n\gamma_5\psi_n)\varphi_{\pi^0} + \sqrt{2}\bar{\psi}_n\gamma_5\psi_p\varphi_{\pi^-} - \sqrt{2}\bar{\psi}_p\gamma_5\psi_n\varphi_{\pi^+}\}. \tag{21.23}$$

在上式中把 γ_5 换成 $\gamma_5\gamma_\mu$，φ 换成 $\partial\varphi/\partial x_\mu$ 并对 $\mu=1,2,3,4$ 求和立刻给出 $\mathscr{L}_2$.

将(21.21)代入(14.28)式，我们得 π 介子和核子在由(21.21)式给出的相互作用下的 S 矩阵为

$$S=1+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_1\mathscr{L}_1(x_1)+\frac{\mathrm{i}^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_1\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_2T[\mathscr{L}_1(x_1)\mathscr{L}_1(x_2)]$$
$$+\cdots+\frac{\mathrm{i}^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_1\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_2\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_nT[\mathscr{L}_1(x_1)\mathscr{L}_1(x_2)\cdots\mathscr{L}_1(x_n)]+\cdots,\tag{21.24}$$

式中

$$\mathscr{L}_1(x)=N\Big[\mathrm{i}g_1\sum_{\rho=1}^{3}\bar{\psi}(x)\gamma_5\tau_\rho\psi(x)\varphi_\rho(x)\Big].\tag{21.25}$$

如把(21.21)换为(21.22)，我们同样得到

$$S=1+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_1\mathscr{L}_2(x_1)+\frac{\mathrm{i}^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_1\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_2T[\mathscr{L}_2(x_1)\mathscr{L}_2(x_2)]$$
$$+\cdots+\frac{\mathrm{i}^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_1\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_2\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_nT[\mathscr{L}_2(x_1)\mathscr{L}_2(x_2)\cdots\mathscr{L}_2(x_n)]+\cdots,\tag{21.26}$$

式中

$$\mathscr{L}_2(x)=N\Big[\mathrm{i}g_2\sum_{\rho=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{4}\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\tau_\rho\psi(x)\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varphi_\rho(x)\Big].\tag{21.27}$$

§22　S 矩阵对核子的非相对论极限

下面我们将证明：在核子的非相对论极限，即当反核子的贡献可以忽略去并且核子的动量比起它的静止质量 M 也可以略去时，(21.24)和(21.26)两式在描述 P 波 π-核子散射时是相等的. 这个结果表明，在核子的非相对论极限，赝标量耦合(21.21)和赝矢量耦合(21.22)对描述 P 波 π 核子散射是完全等价的.

为着证明上面结果，我们首先注意到当反核子的放出和吸收算符被略去后，(21.21)式变为

$$\mathscr{L}_1(x)=\frac{\mathrm{i}g_1}{(2\pi)^3}\sum_{\rho=1}^{3}\int\mathrm{d}^3p\int\mathrm{d}^3p'\,\frac{M}{\sqrt{p_0p_0'}}\sum_r\sum_s\sum_{\lambda=p,n}\sum_{\lambda'=p,n}a_{r\lambda}^*(p)$$
$$\times a_{s\lambda'}(p')[u_r(p)\gamma_5u_s(p')][\chi_\lambda^+\tau_\rho\chi_{\lambda'}]\varphi_\rho(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-p',x)},\tag{22.1}$$

式中 $a_{rp}^*(p)$，$a_{sp}(p')$ 代表质子的放出吸收算符，$a_{rn}^*(p)$，$a_{sn}(p')$ 代表中子的放出吸收算符，M 为核子的质量，χ_p，χ_n 为由(21.1)式给出的核子同位旋波函数. 如果在上式中再忽略去数量级为 $1/M^2$ 的项，我们得

$$\bar{u}_r(\boldsymbol{p})\gamma_5 u_s(\boldsymbol{p}') = \left(\varphi_r^{+},\quad \varphi_r^{+}\frac{(\boldsymbol{\sigma p})}{p_0+M}\right)\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_s \\ \dfrac{(\boldsymbol{\sigma p}')}{p_0'+M}\varphi_s \end{bmatrix}$$

$$\approx \varphi_r^{+}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\frac{1}{2M}\varphi_s. \tag{22.2}$$

在上面推导中我们曾用 $p_0 \approx p_0' \approx M$，式中 φ_s 是二分量的泡利自旋波函数. 现在我们可以引入非相对论极限的核子场算符

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\lambda=p,n}\sum_{r}\int \mathrm{d}^3 p\, a_{r\lambda}(\boldsymbol{p})\varphi_r \mathrm{e}^{i(px)}\chi_\lambda, \tag{22.3}$$

利用上式，(22.1)式的非相对论极限可写为

$$\mathscr{L}_1(x) = -\frac{g_1}{2M}\sum_{\rho=1}^{3}\varphi_\rho(x)\,\nabla\cdot[\phi^{+}(x)\boldsymbol{\sigma}\tau_\rho\phi(x)].$$

对空间积分得出相互作用拉氏函数为

$$L_1 = \int \mathscr{L}_1(x)\mathrm{d}^3 x = -\frac{g_1}{2M}\sum_{\rho=1}^{3}\int \varphi_\rho(x)\,\nabla\cdot(\phi^{+}(x)\boldsymbol{\sigma}\tau_\rho\phi(x))\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}.$$

应用部分积分法上式可写为

$$L_1 = \frac{g_1}{2M}\sum_{\rho=1}^{3}\left\{\int \phi^{+}(x)\boldsymbol{\sigma}\tau_\rho\phi(x)\cdot\nabla\varphi_\rho(x)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} - \int \phi^{+}(x)\boldsymbol{\sigma}\tau_\rho\phi(x)\varphi_\rho(x)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\right\}.$$

上式右边括号内第二项是一个在空间无穷远处包围整个空间的面积分. 按照以前的考虑，这个面积分应为零. 我们得

$$L_1 = \frac{g_1}{2M}\sum_{\rho=1}^{3}\int \mathrm{d}^3 x\,\phi^{+}(x)\boldsymbol{\sigma}\tau_\rho\phi(x)\cdot\nabla\varphi_\rho(x).$$

相应的拉氏函数密度为

$$\mathscr{L}_1'(x) = \sum_{\rho}\frac{g_1}{2M}\phi^{+}(x)\boldsymbol{\sigma}\tau_\rho\phi(x)\cdot\nabla\varphi_\rho(x). \tag{22.4}$$

很容易看出，当 $g_2 = g_1/2M$ 时上式正是(21.22)式的非相对论极限. 这证明了赝标量作用(21.21)式和赝矢量作用(21.22)式在核子的非相对论极限(对介子场仍旧是相对论的)下的等价性.

当我们忽略去 S 矩阵中放出和吸收反核子过程的贡献时，核子的 $S_F(x_1-x_2)$ 函数应换为

$$S_F^{(-)}(x_1-x_2) = \begin{cases} -\mathrm{i}S^{(-)}(x_1-x_2), & \text{当 } t_1 > t_2, \\ 0, & \text{当 } t_1 < t_2. \end{cases} \tag{22.5}$$

不难证实，上式可写成下面形式(见附录 I)

$$S_F^{(-)}(x_1-x_2) = \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4 p\,\frac{\mathrm{i}\hat{p}-M}{2E_p(E_p-p_0-\mathrm{i}\varepsilon)}\mathrm{e}^{i(p,x_1-x_2)},$$

$$E_p = \sqrt{\boldsymbol{p}^2+M^2}. \tag{22.6}$$

在后面我们还将需要引入函数

$$S_F^{(+)}(x_1-x_2)=\begin{cases}0, & \text{当 } t_1>t_2, \\ iS^{(+)}(x_1-x_2), & \text{当 } t_1<t_2.\end{cases} \tag{22.7}$$

它也可写为

$$S_F^{(+)}(x_1-x_2)=\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{i\hat{p}-M}{2E_p(E_p+p_0-i\varepsilon)}e^{i(p\cdot x_1-x_2)}. \tag{22.8}$$

由(22.6)和(22.8)立刻得到等式

$$S_F^{(+)}(x_1-x_2)+S_F^{(-)}(x_1-x_2)=S_F(x_1-x_2). \tag{22.9}$$

现在我们把(22.6)式对 $1/M$ 展开而只取最低项，这样就得到 $S_F^{(-)}(x_1-x_2)$ 的非相对论极限. 由(22.6)式分母中的因子 $E_p-p_0-i\varepsilon$，我们看到积分的最主要的贡献是在 $p_0\approx E_p\approx M$ 时，又由于 $\boldsymbol{p}\ll M$，我们得

$$S_F^{(-)}(x_1-x_2)\cong\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{1}{E_p-p_0-i\varepsilon}e^{i(p\cdot x_1-x_2)}. \tag{22.10}$$

在上式中我们已代入非相对论极限 $i\hat{p}-M\approx-\gamma_4p_0-M\approx-2M$.

利用上述结果我们可以像前面电子和光子的碰撞问题一样算出非相对论的核子和介子的碰撞矩阵. 下面我们将计算介子和核子的最低级的弹性散射. 和康普顿散射的情形一样，相应的费曼图如图 11a 和图 11b 所示. 图中实线代表核子，虚线代表介子. 由(22.5)我们看到，在非相对论近似下，核子的 $S_F^{(-)}(x_1-x_2)$ 函数只有在 $x_1>x_2$ 时才不等于零. 这说明核子线的箭头方向必须永远是向上的. 即这些费曼图不包括放出和吸收反核子的中间过程.

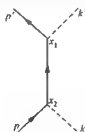


图　11a

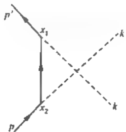


图　11b

相应于图 11a 的 S 矩阵元为

$$\begin{aligned}&{}_0\langle\boldsymbol{p}'r',\boldsymbol{k}'\rho'|S_2^a|\boldsymbol{p}r,\boldsymbol{k}\rho\rangle_0=\langle0|a_{r'}(\boldsymbol{p}')a_{\rho'}(\boldsymbol{k}')\\&\times\frac{(if)^2}{2!}\int d^4x_1\int d^4x_2\,T[\phi^{-(+)}(x_1)\boldsymbol{\sigma}\tau_{\rho'}\phi^{(-)}(x_1)\cdot\nabla\varphi_{\rho'}^{(+)}(x_1)\phi^{+(+)}(x_2)\\&\times\boldsymbol{\sigma}\tau_\rho\phi(x_2)\cdot\nabla\varphi_\rho^{(-)}(x_2)]a_r^*(\boldsymbol{p})a_\rho^*(\boldsymbol{k})|0\rangle.\end{aligned} \tag{22.11}$$

式中 ρ 和 ρ' 代表介子的同位旋标数，$a_{\rho'}(\boldsymbol{k}')$ 和 $a_\rho^*(\boldsymbol{k})$ 代表介子的吸收和放出算符，$f=g_1/2M$，其他符号无须再加解释. 在上式中我们并没有标出核子的同位旋分量，

因为当知道了介子的同位旋态以后，由电荷守恒条件核子的同位旋态即可完全确定．像前面一样，为简单起见我们没有标出 $a_{r'}(\boldsymbol{p}')$ 和 $\phi^{+(+)}(x_1)$ 等间的连线．很容易得出

$$
\begin{aligned}
&\underline{a_{r'}(\boldsymbol{p}')\phi^{+(-)}}(x_1) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\varphi_{r'}^{+}\chi_{\lambda'}^{+}\mathrm{e}^{-i(p'x_1)},\\
&\underline{a_{\rho'}(\boldsymbol{k}')\varphi_{\rho'}^{(+)}}(x_1) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2k_0'}}\chi_{\rho'}^{+}\mathrm{e}^{-i(k'x_1)},\\
&\underline{\phi^{(-)}(x_2)a_r^{*}}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\varphi_r\chi_\lambda\mathrm{e}^{i(px_2)},\\
&\underline{\varphi_\rho^{(-)}(x_2)a_\rho^{*}}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\chi_\rho\mathrm{e}^{i(kx_2)}.
\end{aligned}
\tag{22.12}
$$

χ_ρ 和 χ_λ 分别代表介子和核子的同位旋波函数．把上面结果代入(22.11)，再用

$$
\underline{\phi^{(-)}(x_1)\phi^{+(+)}}(x_2) = S_F^{(-)}(x_1-x_2),
\tag{22.13}
$$

(式中 $S_F^{(-)}(x_1-x_2)$ 由它的非相对论极限表示式(22.10)给出)于是(22.11)变为

$$
\begin{aligned}
{}_0\langle \boldsymbol{p}'r',\boldsymbol{k}'\rho'|S_2^{a}|\boldsymbol{p}r,\boldsymbol{k}\rho\rangle_0 &= \mathrm{i}f^2\frac{1}{(2\pi)^{10}}\frac{1}{2\sqrt{k_0k_0'}}\\
&\times\int \mathrm{d}^4x_1\int\mathrm{d}^4x_2\int\mathrm{d}^4p''\times\mathrm{e}^{i(p'+k'-p'',x_1)}\mathrm{e}^{i(p+k-p'',x_2)}\frac{1}{E_p-p_0-\mathrm{i}\varepsilon}\\
&\times\langle\lambda'\rho'|\tau_{\rho'}\tau_\rho|\lambda\rho\rangle\langle r'|(\boldsymbol{\sigma k}')(\boldsymbol{\sigma k})|r\rangle,
\end{aligned}
\tag{22.14}
$$

式中

$$
\langle\lambda'\rho'|\tau_{\rho'}\tau_\rho|\lambda\rho\rangle = \chi_{\lambda'}^{+}\chi_{\rho'}^{+}\tau_{\rho'}\tau_\rho\chi_\lambda\chi_\rho,
$$

$$
\langle r'|(\boldsymbol{\sigma k}')(\boldsymbol{\sigma k})|r\rangle = \varphi_{r'}^{+}(\boldsymbol{\sigma k}')(\boldsymbol{\sigma k})\varphi_r,
$$

对 x_1,x_2 进行积分得

$$
\begin{aligned}
{}_0\langle \boldsymbol{p}'r',\boldsymbol{k}'\rho'|S_2^{a}|\boldsymbol{p}r,\boldsymbol{k}\rho\rangle_0 &= \frac{\mathrm{i}f^2}{(2\pi)^2}\delta^4(p'+k'-p-k)\frac{1}{2\sqrt{k_0k_0'}}\\
&\times\frac{1}{E_{p+k}-p_0-k_0-\mathrm{i}\varepsilon}\langle\lambda'\rho'|\tau_{\rho'}\tau_\rho|\lambda\rho\rangle\langle r'|(\boldsymbol{\sigma k}')(\boldsymbol{\sigma k})|r\rangle,
\end{aligned}
\tag{22.15}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
&E_{p+k} = \sqrt{(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})^2+M^2}\approx M+\frac{1}{2M}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})^2,\\
&p_0 = E_p = \sqrt{\boldsymbol{p}^2+M^2}\approx M+\frac{1}{2M}\boldsymbol{p}^2,\\
&k_0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}.
\end{aligned}
\tag{22.16}
$$

由(22.16)式我们可把(22.15)式中的分母写为

$$E_{p+k}-p_0-k_0-\mathrm{i}\varepsilon\simeq\frac{1}{2M}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})^2-\frac{1}{2M}\boldsymbol{p}^2-k_0-\mathrm{i}\varepsilon. \tag{22.17}$$

(22.15)式正是由相互作用拉氏函数(22.4)式出发,应用通常的非相对论的微扰论计算所得的结果. 在这个结果中出现的由(22.17)式给出的分母,正是通常微扰论计算里出现的能量分母.

用同样计算可以得出相应于费曼图 11b 的散射矩阵元为

$$
\begin{aligned}
{}_0\langle p'r',k'\rho'|S_2^b|pr,k\rho\rangle_0 &= \frac{\mathrm{i}f^2}{(2\pi)^2}\delta^4(p'+k'-p-k)\frac{1}{2\sqrt{k_0k_0'}}\\
&\times\frac{1}{E_{p-k'}+k_0'-E_p-\mathrm{i}\varepsilon}\langle\lambda'\rho'|\tau_\rho\tau_{\rho'}|\lambda\rho\rangle\langle r'|(\boldsymbol{\sigma k})(\boldsymbol{\sigma k}')|r\rangle.
\end{aligned}
\tag{22.18}
$$

式中

$$E_{p-k'}=\sqrt{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}')^2+M^2},\quad k_0'=\sqrt{\boldsymbol{k}'^2+\mu^2}.$$

在上面所作的非相对论近似里,我们首先对相互作用拉氏函数取非相对论的极限. 在这个极限,$\mathscr{L}_{\text{相互}}$中放出和吸收反核子的算符已被完全略去,因此在相应的 S 矩阵中也不出现放出和吸收反核子过程对 $S_F(x)$ 的贡献. 在通常情况下,非相对论极限所给出的 S 矩阵应该正是这个矩阵对 $1/M$ 展开的最低项. 但我们将在下面指出,当相互作用是由(21.21)式给出的赝标量耦合时,由上面方式得出的非相对论极限并不是 S 矩阵对 $1/M$ 展开的最低项. 真正的最低项反而是由放出和吸收反核子的过程所贡献的. 为具体起见,我们考虑图 11a 当 $t_1<t_2$ 时的情况. 在相对论的 S 矩阵里,这个情况相当于一个反核子在 x_1 被放出,然后又在 x_2 被吸收. 当相互作用是赝标量耦合时,相应的 S 矩阵元为

$$
\begin{aligned}
{}_0\langle p'r',k'\rho'|S_2^{a'}|pr,k\rho\rangle_0 &= \langle 0|a_{r'}(p')a_{\rho'}(k')\frac{g_1^2}{2!}\int\mathrm{d}^4x_1\int\mathrm{d}^4x_2\\
&\times T[\bar\psi^{(+)}(x_1)\gamma_5\tau_{\rho'}\psi^{(+)}(x_1)\bar\psi^{(-)}(x_2)\gamma_5\tau_\rho\psi^{(-)}(x_2)\varphi_{\rho'}^{(+)}(x_1)\varphi_\rho^{(-)}(x_2)]\\
&\times a_r^*(p)a_\rho^*(k)|0\rangle.
\end{aligned}
\tag{22.19}
$$

由(22.8)式得

$$T[\psi^{(+)}(x_1)\bar\psi^{(-)}(x_2)]=S_F^{(+)}(x_1-x_2)=\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4p\frac{(\mathrm{i}\hat p-M)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x_1-x_2)}}{2E_p(E_p+p_0-\mathrm{i}\varepsilon)}. \tag{22.20}$$

把上式对 $1/M$ 展开得

$$S_F^{(+)}(x_1-x_2)\cong\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4p\frac{1}{2M}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x_1-x_2)}. \tag{22.21}$$

这个结果和相应的(22.10)式不同的地方在于:(22.10)式的分母中出现 E_p-p_0,在非相对论极限,E_p 和 p_0 的最低项 M 消去后,就得(22.17)式;而(22.20)式的分母中出现的是 E_p+p_0,因而在非相对论极限变为 $2M$.

将(22.20)和(22.21)代人(22.19)式，并注意 $\gamma_5^2=1$，我们得

$$ {}_0\langle \boldsymbol{p}'r',\boldsymbol{k}'\rho'|S_2^{a'}|\boldsymbol{p}r,\boldsymbol{k}\rho\rangle_0 = -\langle 0|a_{r'}(\boldsymbol{p}')a_{\rho'}(\boldsymbol{k}')\frac{ig_1^2}{2M}\int d^4x\bar{\psi}^{(+)}(x)\tau_{\rho'}\tau_\rho\psi^{(-)}(x) \times \varphi_{\rho'}^{(+)}(x)\varphi_\rho^{(-)}(x)a_r^*(\boldsymbol{p})a_\rho^*(\boldsymbol{k})|0\rangle. \quad (22.22) $$

我们可以进一步把上式中的 $\psi(x)$ 换成非相对论的算符 $\phi(x)$，于是

$$ {}_0\langle \boldsymbol{p}'r',\boldsymbol{k}'\rho'|S_2^{a'}|\boldsymbol{p}r,\boldsymbol{k}\rho\rangle_0 = -\langle 0|a_{r'}(\boldsymbol{p}')a_{\rho'}(\boldsymbol{k}')\frac{ig_1^2}{2M}\int d^4x\phi^{+(+)}(x)\tau_{\rho'}\tau_\rho\phi^{(-)}(x) \times \varphi_{\rho'}^{(+)}(x)\varphi_\rho^{(-)}(x)a_r^*(\boldsymbol{p})a_\rho^*(\boldsymbol{k})|0\rangle. \quad (22.23) $$

同样的计算给出费曼图 11b 中反核子放出和吸收过程对散射矩阵的贡献为

$$ {}_0\langle \boldsymbol{p}'r',\boldsymbol{k}'\rho'|S_2^{b'}|\boldsymbol{p}r,\boldsymbol{k}\rho\rangle_0 = -\langle 0|a_{r'}(\boldsymbol{p}')a_{\rho'}(\boldsymbol{k}')\frac{ig_1^2}{2M}\int d^4x\phi^{+(+)}(x)\tau_\rho\tau_{\rho'}\phi^{(-)}(x) \times \varphi_{\rho'}^{(+)}(x)\varphi_\rho^{(-)}(x)a_r^*(\boldsymbol{p})a_\rho^*(\boldsymbol{k})|0\rangle. \quad (22.24) $$

取上面两式之和，并利用

$$ \tau_\rho\tau_{\rho'}+\tau_{\rho'}\tau_\rho = 2\delta_{\rho'\rho}, $$

我们最后得到

$$ {}_0\langle \boldsymbol{p}'r',\boldsymbol{k}'\rho'|S_2'|\boldsymbol{p}r,\boldsymbol{k}\rho\rangle_0 = -\langle 0|a_{r'}(\boldsymbol{p}')a_{\rho'}(\boldsymbol{k}')\frac{ig_1^2}{2M}\int d^4x\phi^{+(+)}(x)\phi^{(-)}(x) \times \varphi_{\rho'}^{(+)}(x)\varphi_\rho^{(-)}(x)\delta_{\rho'\rho}a_r^*(\boldsymbol{p})a_\rho^*(\boldsymbol{k})|0\rangle. \quad (22.25) $$

上面 S 矩阵元可看成是下列有效作用拉氏函数密度所造成的：

$$ \mathscr{L}_1'' = -\frac{g_1^2}{2M}\phi^{+}(x)\phi(x)\sum_{\rho=1}^{3}\varphi_\rho(x)\varphi_\rho(x). \quad (22.26) $$

比较(22.4)和(22.20)两式，我们看到 $\mathscr{L}_1'$ 和 $\mathscr{L}_1''$ 的数量级都是 $1/M$. 但(22.4)所给出的散射矩阵元(22.15)和(22.18)两式的数量级为 $1/M^2$，而由(22.26)给出的散射矩阵元(22.25)的数量级则为 $1/M$. 这表示在非相对论极限(即 M 可看作是一个很大的量时)费曼图 11a 和 11b 中反核子放出和吸收的过程对矩阵元给出最大的贡献. 这和通常对非相对论极限的理解是不一致的. 因为在通常的概念里，在非相对论极限中反粒子的贡献应该是可以略去的. 这个"反常"的情形完全是由于(21.21)式的 γ_5 因子所造成的.

由相互作用 $\mathscr{L}_1'$ 所给出的散射矩阵元(22.15)和(22.18)都含有因子$(\boldsymbol{\sigma k})$和$(\boldsymbol{\sigma k}')$. 这表明在低能领域，这些矩阵元只给出 P 波散射. 另一方面由 $\mathscr{L}_1''$ 所导出的散射矩阵元(22.25)式只给出 S 波散射. 如果赝标量耦合代表介子和核子间真实存在的相互作用，那么按照上面讨论结果，S 波散射应比 P 波散射大得多. 但实验结果指出 P 波散射是主要的. 如果赝矢量耦合是真实存在的相互作用，那么 S 波的散射截面将为零，这也与实验事实相违反. 有些作者曾经指出，如果接受赝标量耦合(21.21)作为正确的相互作用，由 S 矩阵算出的高级微扰的效应可能会压低 S 波散

射.但目前尚不能得出肯定的结论.再者，由于介子和核子间的作用是很强的，用微扰论所作的计算是否可靠也一般的受到很大的怀疑.在一个很长的时期内，人们倾向于接受赝标量耦合作为理论的出发点.这样做的一个主要的论点是：赝标量耦合是可以重正化的，而赝矢量耦合，按照通常的计算方法，是不可以重正化的.关于重正化问题我们将在下一章详细地加以阐述，现在我们知道 β 衰变的作用就是不可以重正化，因此没有原则性的理由认为强作用必须是可以重正化的.

近几年的实验结果指出，在 π 介子和 π 介子之间存在着强的直接的相互作用.这个 π 介子间的作用可以完满地解释 π 介子和核子间的S波散射而无需借助于相互作用(22.26)式.这就意味着，过去认为的只有赝标量耦合才能给出 π 介子和核子的S波散射这一论点也不再成立了.

在另一方面，如果我们接受赝矢量耦合作为理论的出发点，那么由于这个理论是不可重正化的，就将使得理论存在着很大的不确定性.我们将在下一章详细地讨论这个问题.

在近年来发展起来的色散关系理论里，提倡着这样一种思想：在高能范围内，散射幅的解析性和有关的运动学的条件，将用以代替拉氏函数和哈密顿量，作为理论的出发点.这和人们在解平面电场问题时的情形相似.人们发现，在静电现象里，电场分布可由满足边界条件的解析函数完全决定，在求解时可以完全不考虑不同部分的电场之间的物理效应.通常在场论里所选取的相互作用拉氏函数不应适用于高能现象可从下面这些情况看出：当我们在§21中选取介子场和核子的相互作用拉氏函数时，曾经假定这个函数只含有 $\varphi_\rho(x)$ 的一次方(即汤川型作用)，不包含 $\varphi_\rho(x)$ 的高级微商，以及介子场 $\varphi_\rho(x)$ 和核子场 $\psi(x')$ 只有在坐标相同(即 $x=x'$)时才有相互作用(这相当于在经典理论里把核子看成一个无结构的质点)等等.这些假定显然只有在能量相当低时才有可能是正确的.因为对能量很高的宇宙线现象的观察指出，在高能碰撞过程中，核子很可能同时放出很多介子.这样在相应的拉氏函数中就必须包含 $\varphi_\rho(x)$ 的高次方项.

§23 π介子和核子低能散射的共振现象，塔姆-唐可夫近似

上节的讨论已经指出，由于 π 介子和核子间的相互作用很强，应用§14中导出的 S 矩阵对于作用常数的微扰展开式所算出最低级项的可靠性是很值得怀疑的.假定 π 介子和核子间的作用是赝标量耦合，由实验测定的 $g_1^2/4\pi$ 在 $\hbar=c=\mu=1$ (μ 为介子的质量)的单位系统中的值约为15，这的确是一个很大的数.但在非相对论近似下，在相应的拉氏函数密度(22.4)式中出现的作用常数 $f^2/4\pi=g_1^2/16\pi M^2$ 的值仅为0.08，由于(22.4)式还含有对 $\varphi_\rho(x)$ 的微分，当介子的动量很低时 $\nabla\varphi_\rho(x)$

将是很小的，这说明在非相对论范围内，由(22.4)给出的相互作用拉氏函数可以看作是一个很小的量. 所以当我们考虑 π 介子和核子的低能 P 波散射时，微扰论的计算似乎应当是可用的. 但是实验的观察指出，在 π 介子和核子的低能散射中出现一个 $J=3/2$ 和 $T=3/2$ 的共振. 这个共振的出现使得上述微扰论的计算即使在作用常数很小时也不能应用. 这和光子被原子散射在共振时的情况是相同的. 在光子和原子碰撞现象里，当入射光子的能量恰好足够使原子激发到一个高能级时，光子和原子的相互作用就大为增强，碰撞截面也骤然增加，出现一个高峰，这就是实验上所观察到的共振现象. 当光子的能量趋于共振的能量时，用微扰论算出的散射矩阵元将趋于无穷大. 所以在共振附近，微扰论计算的结果是不正确的. 为着正确地描述共振现象，必须引入一个更准确的近似，这就是韦斯科普夫-维格纳(Weisskopf-Wigner)近似. 按照量子场论，在一个光子被原子散射的过程中，会出现存在着任意个光子的中间态. 在韦斯科普夫-维格纳近似里，所有光子数大于给定值 n 的态都被忽略去. 除此以外，在求薛定谔方程的解时不再作微扰近似. 通常取 $n=1$ 或 2 即可得出与实验相符的共振散射的强度和宽度. 韦斯科普夫-维格纳近似是处理原子物理里共振散射现象唯一有效的方法.

在处理 π-N(N 代表核子)共振散射问题时，一个很自然的想法是把原子理论里的韦斯科普夫-维格纳近似推广到 π-N 散射问题里来. 这样推广出来的近似方法一般称为塔姆-唐可夫(Tamm-Dancoff)近似. 用这个近似的方法处理 π-N 散射在总角动量 $J=3/2$，总同位旋 $T=3/2$ 态出现的共振获得十分满意的结果. 像在原子散射理论中的韦斯科普夫-维格纳近似一样，在塔姆-唐可夫近似里所有介子数大于 n 的态也都被忽略去. 对于上述 $J=3/2$，$T=3/2$ 态的共振散射，我们取 $n=2$. 因为这里所讨论的共振能量(≈ 200 MeV，为核子静止质量的 1/5)是较低的，我们可以采用上节所给的非相对论近似. 如果我们在忽略去介子数大于 2 的态以后，仍进行微扰计算，那么全部的费曼图应由图 12 给出，图中 a 代表展开式的零级项，b 代表二级微扰项，c 代表四级微扰项，d 代表六级微扰项，等等. 从这些费曼图我们看到，在任何时候，这些过程都不包括介子数大于 2 的态. 初看起来，这些费曼图里也应包括像图 13 所示的过程. 很容易看出在图 13 中的费曼图 a，b，c 都不可能对 $J=3/2$，$T=3/2$ 态有贡献，因为这些过程在某一段时间内将跃迁到介子数为零的一个核子的态. 由于角动量和同位旋角动量守恒，这些过程只可能属于 $J=1/2$，$T=1/2$ (这正是一个核子态的 J 和 T 值)的态. 图 13d 是可以属于 $T=3/2$，$J=3/2$ 态的. 它是由图 12 给出的费曼图再包括进一个将在 §26 中讨论的自能部分所构成的. 当核子被看成是静止时，这个自能部分不导致任何可观察的效应，因此可以略去. 上面的讨论说明图 12 已包括所有对 $T=3/2$，$J=3/2$ 态散射有贡献的介子数≤2 的费曼图. 现在的问题是怎样把由图 12 中过程所代表的微扰展开级数重新

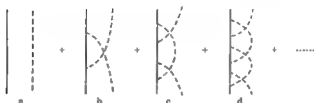


图 12

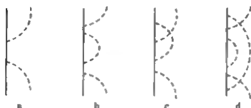


图 13

加起来，以得到严格的解.在下面计算里，我们将应用上节所给的方法，取 S 矩阵对核子的非相对论近似.由于 S 波不可能对 $J=3/2$ 态有贡献，我们将只考虑由(22.4)给出的 P 波介子和核子的相互作用 $\mathscr{L}_1'(x)$.在核子被看成静止的近似下，π介子与核子的散射矩阵可表为

$$
\begin{aligned}
{}_0\langle r', \boldsymbol{k}'\rho' | S | r, \boldsymbol{k}\rho\rangle_0 &= {}_0\langle r', \boldsymbol{k}'\rho' | r, \boldsymbol{k}\rho\rangle_0 \\
&\quad - \mathrm{i}\delta(k_0' - k_0)\, {}_0\langle r', \boldsymbol{k}'\rho' | T | r, \boldsymbol{k}\rho\rangle_0 .
\end{aligned} \tag{23.1}
$$

利用上节的非相对论近似方法，我们得相应于图 12b 的 T 矩阵为

$$
\begin{aligned}
{}_0\langle r', \boldsymbol{k}'\rho' | T_2 | r, \boldsymbol{k}|\rho\rangle_0 &= -\frac{f^2}{(2\pi)^2}\frac{1}{2\sqrt{k_0 k_0'}}\frac{1}{k_0'}\langle \rho' | \tau_\rho \tau_{\rho'} | \rho\rangle \\
&\quad \times \langle r' | (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{k})(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{k}') | r\rangle .
\end{aligned} \tag{23.2}
$$

式中 $f=g_1/2M$，r 代表核子的自旋，$\boldsymbol{k}$，ρ 代表介子的动量和同位旋.相应于图 12c 的 T 矩阵为

$$
\begin{aligned}
{}_0\langle r', \boldsymbol{k}'\rho' | T_4 | r, \boldsymbol{k}\rho\rangle_0 = {} & \frac{f^4}{(2\pi)^6}\frac{1}{2\sqrt{k_0 k_0'}}\sum_{\rho''}\int \mathrm{d}^4 x_1 \int \mathrm{d}^4 x_2 \int \mathrm{d}^4 x_3 \int \mathrm{d}^4 x_4 \\
& \times \langle r'\rho' | \tau_{\rho'}(\boldsymbol{\sigma}\nabla_1)\tau_{\rho''}(\boldsymbol{\sigma}\nabla_2)\tau_\rho(\boldsymbol{\sigma}\nabla_3)\tau_{\rho''}(\boldsymbol{\sigma}\nabla_4) | r\rho\rangle \\
& \times \Delta_F(x_1 - x_4) S_F(x_1 - x_2) S_F(x_2 - x_3) S_F(x_3 - x_4).
\end{aligned}
$$

式中$\nabla_i = \mathrm{d}/\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$，核子的 $S_F(x)$ 函数为上节给出的非相对论表达式(22.10).由 $S_F(x)$ 的性质我们看到，式中积分只在 $t_1 > t_4$ 时有贡献，所以可把 $\Delta_F(x_1 - x_4)$ 换为

$$
\mathrm{i}\Delta^{(-)}(x_1 - x_4) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}^3 \boldsymbol{k}}{2k_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k, x_1 - x_4)}, \quad k_0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + \mu^2}.
$$

进行对 x_1，x_2，x_3 和 x_4 的积分立刻给出，

$$
{}_0\langle r',\boldsymbol{k}'\rho'|T_4|r,\boldsymbol{k}\rho\rangle_0=\sum_{\rho''r''}\int d^3\boldsymbol{k}''\langle r',\boldsymbol{k}'\rho'|K|r'',\boldsymbol{k}''\rho''\rangle
\times\frac{1}{k_0-k_0''+i\varepsilon}\,{}_0\langle r'',\boldsymbol{k}''\rho''|T_2|r,\boldsymbol{k}\rho\rangle_0,
$$

式中

$$
\langle r',\boldsymbol{k}'\rho'|K|r'',\boldsymbol{k}''\rho''\rangle=\frac{f^2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{k_0'k_0''}}
\times\frac{\langle\rho'|\tau_{\bar{\rho}}\tau_{\rho}|\rho''\rangle\langle r'|(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{k}'')(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{k}')|r''\rangle}{(k_0-k_0'-k_0''+i\varepsilon)}. \quad (23.3)
$$

同样的计算给出相应于图 12 中 $2n$ 级费曼图的 T 矩阵元由下式给出

$$
{}_0\langle r',\boldsymbol{k}'\rho'|T_{2n}|r,\boldsymbol{k}\rho\rangle_0=\sum_{\rho''r''}\int d^3\boldsymbol{k}''\langle r',\boldsymbol{k}'\rho'|K|r'',\boldsymbol{k}''\rho''\rangle
\times\frac{1}{k_0-k_0''+i\varepsilon}\,{}_0\langle r'',\boldsymbol{k}''\rho''|T_{2n-2}|r,\boldsymbol{k}\rho\rangle_0. \quad (23.4)
$$

由上面结果很容易看出 T 矩阵满足下列积分方程：

$$
{}_0\langle r',\boldsymbol{k}'\rho'|T|r,\boldsymbol{k}\rho\rangle_0=\langle r',\boldsymbol{k}'\rho'|T_2|r,\boldsymbol{k}\rho\rangle
+\int d^3\boldsymbol{k}''\sum_{r''}\sum_{\rho''}\langle r',\boldsymbol{k}'\rho'|K|r'',\boldsymbol{k}''\rho''\rangle\frac{1}{k_0-k_0''+i\varepsilon_0}
\times\langle r'',\boldsymbol{k}''\rho''|T|r,\boldsymbol{k}\rho\rangle. \quad (23.5)
$$

上面方程式可以进一步进行简化.为此我们引入同位旋角动量 T 和普通空间角动量 J 的本征表象

$$
\langle T'T_z',J'J_z'|K(k',k)|TT_z,JJ_z\rangle
=\sum_{\rho}\sum_{\rho'}\int d\Omega_{k'}\int d\Omega_k\langle T'T_z',J'J_z'|r',\boldsymbol{k}'\rho'\rangle\langle r',\boldsymbol{k}'\rho'|K|r,\boldsymbol{k}\rho\rangle
\times\langle r,\boldsymbol{k}\rho|TT_z,JJ_z\rangle. \quad (23.6)
$$

因为介子和核子的相互作用拉氏函数是普通空间和同位旋空间的标量,因此(23.6)必定是一个对角的矩阵，

$$
\langle T'T_z',J'J_z'|K(k',k)|TT_z,JJ_z\rangle=\delta_{T'T}\delta_{T_z'T_z}\delta_{J'J}\delta_{J_z'J_z}K_{TJ}(k',k). \quad (23.7)
$$

上式右边的 δ 函数反映着在作用过程中同位旋角动量和普通角动量的守恒定律，$K_{TJ}(k'k)$是与 T_z, J_z 无关的.此处 k, k' 代表 $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}'$ 的绝对值.条件(23.7)等价于

$$
\int d\Omega_{k''}\sum_{\rho''}\sum_{r''}\langle r',\boldsymbol{k}'\rho'|K|r'',\boldsymbol{k}''\rho''\rangle\langle r'',\boldsymbol{k}''\rho''|TT_z,JJ_z\rangle
=K_{TJ}(k',k'')\langle r',\boldsymbol{k}'\rho'|TT_z,JJ_z\rangle, \quad (23.8)
$$

$d\Omega_{k''}$代表 $\boldsymbol{k}''$ 的立体角元素.上式又可写为

$$
K|TT_zJJ_z\rangle=K_{TJ}(k',k'')|TT_zJJ_z\rangle. \quad (23.9)
$$

利用(23.2)式,上面的本征值方程可用下式代替：

$$\sum_{\rho}\tau_{\rho}\tau_{\rho'}\langle\rho''|TT_z\rangle=\alpha_T\langle\rho'|TT_z\rangle, \tag{23.10}$$

$$\frac{1}{k'k''}\int \mathrm{d}\Omega_{k'}(\boldsymbol{\sigma k}'')(\boldsymbol{\sigma k}')\langle k''|JJ_z\rangle=\beta_J\langle k|JJ_z\rangle. \tag{23.11}$$

由(23.2),(23.9),(23.10)和(23.11),我们得

$$K_{TJ}(k',k'')=\frac{f^2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{k_0k_0'}}\frac{k'k''}{k_0-k_0'\quad k_0''+\mathrm{i}\varepsilon}\alpha_T\beta_J. \tag{23.12}$$

下面我们将先由(23.10)式求出本征值 α_T. 对于一个核子和一个介子的系统,T 只能取 $T=3/2$ 和 $T=1/2$ 两个值,所以 α_T 也只有两个值 $\alpha_{3/2}$ 和 $\alpha_{1/2}$. 引入

$$Q=\tau_{\rho}\tau_{\rho'},\quad Q'=\tau_{\rho'}\tau_{\rho}. \tag{23.13}$$

由对易关系

$$\tau_{\rho'}\tau_{\rho}+\tau_{\rho}\tau_{\rho'}=2\delta_{\rho'\rho},$$

我们得

$$Q+Q'=2I, \tag{23.14}$$

I 为 2×2 单位矩阵. (23.10)可写为

$$Q|TT_z\rangle=\alpha_T|TT_z\rangle. \tag{23.15}$$

由(23.14)得

$$Q'|TT_z\rangle=(2-\alpha_T)|TT_z\rangle. \tag{23.16}$$

由定义(23.13)式,我们得

$$Q'^2=\sum_{\rho}\tau_{\rho'}\tau_{\rho}\cdot\tau_{\rho}\tau_{\rho'}=3\tau_{\rho'}\tau_{\rho'},$$

即

$$Q'^2=3Q'. \tag{23.17}$$

由上式立刻看到 Q' 的本征值只可能是 3 和 0. 代入(23.16)立刻给出 α_T 的两个值为 -1 和 2. 现在还不知道这两个本征值中哪一个是 $\alpha_{3/2}$. 为着解决这个问题,我们注意到 $T=3/2, T_z=3/2$ 态的同位旋波函数可写为

$$|3/2,3/2\rangle=\chi_1^{+1}\chi_{1/2}^{1/2}, \tag{23.18}$$

χ_1^{+1} 和 $\chi_{1/2}^{1/2}$ 分别代表 π^+ 和质子的同位旋波函数. 这个波函数的 ρ 分量为

$$\langle\rho|3/2,3/2\rangle=-\frac{1}{\sqrt{2}}[\delta_{\rho1}+\mathrm{i}\delta_{\rho2}]\chi_{1/2}^{1/2}. \tag{23.19}$$

在上式中 π^+ 介子的同位旋波函数 $-[\delta_{\rho1}+\mathrm{i}\delta_{\rho2}]/\sqrt{2}$ 也可写成矩阵形式

$$\chi_{\pi^+}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ \mathrm{i}\\ 0\end{bmatrix}, \tag{23.20}$$

这个矩阵的三个矩阵元代表 $\rho=1,2,3$ 的三个分量. 由(23.13)和(23.19)两式并利

用(21.3)得

$$Q'|3/2,3/2\rangle-\sum_{\rho=1}^{3}\tau_\rho\tau_\rho'\langle\rho'|3/2,3/2\rangle=-\tau_\rho'\frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1+i\tau_2)\chi_{1/2}^{1/2}$$

$$=-\tau_\rho'\tau_+\chi_\rho=0. \tag{23.21}$$

此结果表明,$T=3/2$ 的态是 Q' 的本征态,并且本征值为零.下表给出 Q 和 Q' 的本征值 α_T 和 $\alpha_T'=2-\alpha_T$ 在 $T=3/2$ 和 $T=1/2$ 时的值

	$T=1/2$	$T=3/2$
α_T	-1	2
$\alpha_T'=2-\alpha_T$	3	0

对于(23.11)式我们可用类似的计算求出 β_J 的值.引入下面两个积分算符

$$P=\int d\Omega_{k'}(\boldsymbol{\sigma k''})(\boldsymbol{\sigma k'})\frac{1}{k''k'},$$

$$P'=\int d\Omega_{k'}(\boldsymbol{\sigma k'})(\boldsymbol{\sigma k''})\frac{1}{k''k'}. \tag{23.22}$$

由对易关系

$$(\boldsymbol{\sigma k'})(\boldsymbol{\sigma k''})+(\boldsymbol{\sigma k'})(\boldsymbol{\sigma k''})=2(\boldsymbol{k'k''}),$$

我们得

$$P+P'=2\int d\Omega_{k'}(\boldsymbol{k'k''})\frac{1}{k'k''}, \tag{23.23}$$

(23.11)式可写为

$$P|JJ_z\rangle=\beta_J|J,J_z\rangle. \tag{23.24}$$

因为算符(23.23)是普通空间的标量,所以总角动量 J 的本征态也是 $P+P'$ 的本征态.(23.24)表示 P 的本征态也是 J 的本征态,于是 $|JJ_z\rangle$ 也必须是 P' 的本征态,即

$$P'|JJ_z\rangle=\beta_J'|JJ_z\rangle. \tag{23.25}$$

相应于(23.17)式我们得

$$P'^2=\int d\Omega_{k''}(\boldsymbol{\sigma k'})(\boldsymbol{\sigma k'''})\int d\Omega_{k'}(\boldsymbol{\sigma k'''})(\boldsymbol{\sigma k''})\frac{1}{k'k''k'''^2}$$

$$=4\pi\int d\Omega_{k'}(\boldsymbol{\sigma k'})(\boldsymbol{\sigma k''})=4\pi P'. \tag{23.26}$$

这里,我们看到 P' 的本征值只可能取 $\beta_J'=0$ 和 4π.

在本问题里所要考虑的 J 和 J_z 的本征函数代表一个 P 波介子和核子的相对角动量和核子自旋的耦合,它可写为

$$|JJ_z\rangle=\sum_m C_{1\,1/2\,m,J_z-m,JJ_z}Y_1^m\varphi_{1/2}^{J_z-m}, \tag{23.27}$$

Y_1^m 代表相对角动量为 1 的球函数,$\varphi_{1/2}^{\pm1/2}$ 代表核子的自旋波函数.在 $\boldsymbol{k}$ 表象里

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{k}|1/2,1/2\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{3}}\,\frac{1}{k}k_z\varphi_{1/2}^{1/2} + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{k}\,\frac{k_x+\mathrm{i}k_y}{\sqrt{2}}\varphi_{1/2}^{-1/2},\\
\langle \boldsymbol{k}|1/2,-1/2\rangle &= -\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{k}\,\frac{k_x-\mathrm{i}k_y}{\sqrt{2}}\varphi_{1/2}^{1/2} + \sqrt{\frac{1}{3}}\,\frac{1}{k}k_z\varphi_{1/2}^{-1/2},\\
\langle \boldsymbol{k}|3/2,\pm 3/2\rangle &= \mp\frac{k_x\pm\mathrm{i}k_y}{\sqrt{2}k}\varphi_{1/2}^{\pm 1/2},\qquad\qquad (23.28)\\
\langle \boldsymbol{k}|3/2,1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{k}k_z\varphi_{1/2}^{1/2} - \sqrt{\frac{1}{3}}\,\frac{1}{k}\,\frac{k_x+\mathrm{i}k_y}{\sqrt{2}k}\varphi_{1/2}^{-1/2},\\
\langle \boldsymbol{k}|3/2,-1/2\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}\,\frac{1}{k}\,\frac{k_x-\mathrm{i}k_y}{\sqrt{2}}\varphi_{1/2}^{1/2} + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{k}k_z\varphi_{1/2}^{-1/2}.
\end{aligned}
$$

很容易由(23.23)式证明

$$
(P+P')|J,J_z\rangle = \frac{8\pi}{3}|J,J_z\rangle, \qquad (23.29)
$$

即

$$
\beta_J + \beta_J' = \frac{8\pi}{3}. \qquad (23.30)
$$

由上面结果我们看到 β_J 的值只可能取 $\beta_J = -4\pi/3$ 和 $8\pi/3$. 为着确定相应的 J 值，像前面对 α_T 的考虑一样，我们注意到

$$
\begin{aligned}
P'|3/2,3/2\rangle &= \int \mathrm{d}\Omega_{k''}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{k}')(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{k}'')\,\frac{1}{k''^2\sqrt{2}}(k''_x+\mathrm{i}k''_y)\varphi_{1/2}^{1/2}\\
&= \frac{-1}{k'}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{k}')\int \mathrm{d}\Omega_{k''}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{k}'')\,\frac{1}{k''^2}(k''_x+\mathrm{i}k''_y)\varphi_{1/2}^{1/2}\\
&= -\frac{1}{k'}(\sigma k')\cdot\frac{4\pi}{3\sqrt{2}}(\sigma_x+\mathrm{i}\sigma_y)\varphi_{1/2}^{1/2}\\
&= 0, \qquad (23.31)
\end{aligned}
$$

在推导过程里我们曾利用关系

$$
-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x+\mathrm{i}\sigma_y)\varphi_{1/2}^{1/2} = \sigma_+\,\varphi_{1/2}^{1/2} = 0.
$$

由上面结果我们看到 $\beta'_{3/2}=0$，$\beta'_{1/2}=4\pi$. 再由(22.30)式得$\beta_{3/2}=8\pi/3$，$\beta_{1/2}=-4\pi/3$. 这个结果可列表如下：

	$J=1/2$	$J=3/2$
β_J	$-\frac{4\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$
$\beta_J'=\frac{8\pi}{3}-\beta_J$	4π	0

现在我们可引入

$$T_{TJ}(k',k)=\langle TJk'|T|TJk\rangle, \tag{23.32}$$

式中 k 和 k' 分别代表始态和末态动量的绝对值. 在上式中略去了 T_z 和 J_z，因为这个矩阵元与 T_z 和 J_z 的值无关. 在 T，J 的对角表象中(23.5)式变为

$$T_{TJ}(k',k)=K_{TJ}(k',k)+\int k'^2\mathrm{d}k''K_{TJ}(k',k'')\times\frac{1}{k_0-k_0''+\mathrm{i}\varepsilon}T_{TJ}(k'',k). \tag{23.33}$$

上式是通常的弗雷德霍姆(Fredholm)积分方程，可以用标准方式求解[1]. 在下面我们只须讨论 $T=3/2$，$J=3/2$ 时的情况，因为这是我们所要求的出现共振的态. 用

$$K_{3/2\,3/2}(k',k'')=\frac{f^2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{k_0'k_0''}}\frac{k'k''}{k_0-k_0'-k_0''+\mathrm{i}\varepsilon}\cdot\frac{16\pi}{3}, \tag{23.34}$$

代入积分方程(23.33)，我们得

$$T_{3/2\,3/2}(k',k'')=-\frac{2f^2}{3\pi}\frac{k'k}{\sqrt{k_0'k_0k_0'}}+\int k''^2\mathrm{d}k''\frac{f^2}{3\pi^2}\times\frac{k'k''T_{3/2\,3/2}(k'',k)}{\sqrt{k_0'k_0''}(k_0-k_0'-k_0''+\mathrm{i}\varepsilon)(k_0-k_0''+\mathrm{i}\varepsilon)}. \tag{23.35}$$

不难看出，上式不存在有限的解，因当 f^2 很小时，我们可以用迭代法求上式的解. 但当我们把上式右边第一项作为 $T(k'',k)$ 代入最后一项中时立刻给出发散的积分. 这个发散困难不可能由下一章的重正化处理加以消除. 这是因为非相对论的介子和核子的相互作用是不可重正化的.

为着消除上述发散困难，丘(Chew)假定核子具有一个有限的半径[2]. 命 $\rho(\boldsymbol{r})$ 为核子的分布函数，$\boldsymbol{r}$ 以核子中心为原点. 我们可写

$$\rho(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3kv(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \tag{23.36}$$

式中 $v(k)$ 是 $k\equiv|\boldsymbol{k}|$ 的实函数. 由(22.4)给出的 π 介子与核子的相互作用拉氏函数密度可改写成

$$\mathscr{L}_1(x)=\sum_{\alpha=1}^{3}f\psi^+(x)\boldsymbol{\sigma}\tau_\alpha\psi(x)\cdot\int\mathrm{d}^3r\rho(\boldsymbol{r})\nabla\varphi_\alpha(x+\boldsymbol{r}). \tag{23.37}$$

当 $\rho(\boldsymbol{r})$ 趋于 $\delta(\boldsymbol{r})$ 时，上式即趋于(22.4)式. 在(23.36)式中的 $\boldsymbol{r}$ 代表在相互作用时介子的位置(以核子中心为原点). $\rho(\boldsymbol{r})$ 在(23.37)式中出现表示这两种场在坐标不完全重合时即可以有相互作用.

由(23.36)和下列展开式

$$\varphi_\alpha(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2k_0}}[a_\alpha(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}+a_\alpha^*(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx)}], \tag{23.38}$$

① Whittaker and Watson《Modern analysis》第十一章.

② G. F. Chew (1954) *Phys. Rev.* **94** 1748, **95** 1669.

可得

$$\int d^3 r\rho(\boldsymbol{r})\,\nabla\varphi_a(x+\boldsymbol{r}) = \nabla\varphi_a'(x),$$

$$\varphi_a'(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{2k_0}} v(k)\left[a_a(\boldsymbol{k})e^{i(kx)} + a_a^*(\boldsymbol{k})e^{-i(kx)}\right]. \tag{23.39}$$

于是(23.37)可写为

$$\mathscr{L}_1(x) = \sum_{a=1}^{3} f\psi^+(x)\boldsymbol{\sigma}\tau_a\psi(x)\cdot\nabla\varphi_a'(x). \tag{23.40}$$

这个结果表明，把核子看成一个有限分布的效果是在(23.38)式中引入一个因子 $v(k)$，亦即把 $a_a(\boldsymbol{k})$ 和 $a_a^*(\boldsymbol{k})$ 换成 $v(k)a_a(\boldsymbol{k})$ 和 $v(k)a_a^*(\boldsymbol{k})$. 当 $\rho(r)$ 只在一个很小的半径 R 以内不等于零时，相应的 $v(k)$ 当 $k\gg 1/R$ 时将趋近于零. 为着看清这一点，我们写出(23.36)的反变换为

$$v(k) = \int_0^{\infty}\rho(\boldsymbol{r})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3\boldsymbol{r}. \tag{23.41}$$

用

$$\rho(\boldsymbol{r}) = 0, \quad 当\ |\boldsymbol{r}| > R,$$

代入(23.41)，可得

$$v(k) = \int_0^{R}\rho(\boldsymbol{r})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3\boldsymbol{r}. \tag{23.42}$$

当 $k\ll 1/R$ 时，上面积分中的指数因子可以用 1 代替. 由核子分布的归一化条件

$$\int_0^{\infty}\rho(\boldsymbol{r})d^3\boldsymbol{r} = \int_0^{R}\rho(\boldsymbol{r})d^3\boldsymbol{r} = 1, \tag{23.43}$$

我们看到当 $k\ll 1/R$ 时 $v(k)\approx 1$，当 $k\gg 1/R$ 时，(23.42)式中指数因子很快地绕零值振荡，以致积分的值为零. 所以我们得

$$v(k) \approx \begin{cases} 1, & 当\ k \ll 1/R, \\ 0, & 当\ k \gg 1/R. \end{cases} \tag{23.44}$$

因子 $v(k)$ 的引入使得高能的介子($k\gg 1/R$)和核子的相互作用大大减低并且在 $k\to\infty$ 时趋于零. 如果所选取的 $v(k)$ 在 $k\to\infty$ 时趋于零的速度够快，那么所有积分都将变得收敛. 上面所引入的 $v(k)$ 实际上起着收敛因子的作用.

如果我们把介子的放出和吸收算符重新定义为

$$\begin{aligned} \bar{a}_a^*(\boldsymbol{k}) &= v(k)a_a^*(\boldsymbol{k}), \\ \bar{a}_a(\boldsymbol{k}) &= v(k)a_a(\boldsymbol{k}), \end{aligned} \tag{23.45}$$

由(23.39)和(23.40)我们看到，把核子看成一个有限分布的效果等于把 $a_a^*(\boldsymbol{k})$ 和 $a_a(\boldsymbol{k})$ 换成 $\bar{a}_a^*(\boldsymbol{k})$ 和 $\bar{a}_a(\boldsymbol{k})$. $\bar{a}_a^*(\boldsymbol{k})$ 和 $\bar{a}_a(\boldsymbol{k})$ 所满足的对易关系可写为

$$[\bar{a}_a(\boldsymbol{k}), \bar{a}_{a'}^*(\boldsymbol{k}')] = v(k)^2\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\delta_{aa'}. \tag{23.46}$$

当 k 无限制增加时，上面的对易关系将趋于零. 上式说明引入核子的半径和在对易

关系的右边引入 $v(k)^2$ 是等价的.

为简单起见,我们可以选取

$$v(k)=\begin{cases}1, & \text{当 } k<K, \\ 0, & \text{当 } k\geqslant K.\end{cases} \tag{23.47}$$

K 是一个"截断动量",因为在选取上式后所有的积分都将以 $k=K$ 为积分的上限.

在引入以(23.47)式给出的因子 $v(k)$ 以后,积分方程(23.35)变为

$$T_{3/2\,3/2}(k',k)=-\frac{2f^2}{3\pi}\frac{k'k}{k_0'\sqrt{k_0'k_0}}+\frac{f^2}{3\pi^2}\int_0^K k''^2\mathrm{d}k''\frac{k'k''}{\sqrt{k_0'k_0''}}$$
$$\times\frac{T_{3/2\,3/2}(k'',k)}{(k_0-k_0'-k_0''+\mathrm{i}\varepsilon)(k_0-k_0''+\mathrm{i}\varepsilon)}, \tag{23.48}$$

这个积分方程可以用数字计算法或用弗雷德霍姆级数解法求出近似的解.在后一解法里,我们引入积分

$$D(k)=1-\frac{f^2}{3\pi^2}\int_0^K\frac{k'^4\mathrm{d}k'}{k_0'(k_0-2k_0'+\mathrm{i}\varepsilon)(k_0-k_0'+\mathrm{i}\varepsilon)}, \tag{23.49}$$

$$D(k',k'';k)=\frac{f^2}{3\pi^2}\frac{k'k''^3}{\sqrt{k_0'k_0''}}\frac{1}{(k_0-k_0'-k_0''+\mathrm{i}\varepsilon)(k_0-k_0''+\mathrm{i}\varepsilon)}. \tag{23.50}$$

如果只取至弗雷德霍姆级数解的第二项,我们得(23.48)式的近似解为

$$T_{3/2\,3/2}(k'k)=-\frac{2f^2}{3\pi}\frac{k'k}{k_0'\sqrt{k_0'k_0}}-\int_0^K\frac{2f^2}{3\pi}\frac{k''k}{k_0''\sqrt{k_0''k_0}}\frac{D(k',k'';k)}{D(k)}\mathrm{d}k''$$
$$=-\frac{2f^2}{3\pi}\frac{k'k}{k_0'\sqrt{k_0'k_0}}-\frac{k'k}{\sqrt{k_0k_0'}}\frac{2f^4}{9\pi^3}\frac{1}{D(k)}$$
$$\times\int_0^K\frac{k''^4\mathrm{d}k''}{k_0''^2(k_0-k_0'-k_0''+\mathrm{i}\varepsilon)(k_0-k_0''+\mathrm{i}\varepsilon)}. \tag{23.51}$$

式中 k' 和 k'' 分别代表 $\boldsymbol{k}'$ 和 $\boldsymbol{k}''$ 的绝对值.在实际散射问题里 $k'=k$,于是上式变为

$$T_{3/2\,3/2}(k'k)=-\frac{2f^2}{3\pi}\frac{k^2}{k_0^2}\left[1-\frac{f^2}{3\pi^2}\frac{k_0}{D(k)}\int_0^K\frac{k'^4\mathrm{d}k'}{k_0'^3(k_0-k_0'+\mathrm{i}\varepsilon)}\right]. \tag{23.52}$$

代入 $k\mathrm{d}k=k_0\mathrm{d}k_0$,(23.49)式可写为

$$D(k)=1-\frac{f^2}{3\pi^2}\int_0^{K_0}\frac{k'^3\mathrm{d}k_0'}{(k_0-2k_0'+\mathrm{i}\varepsilon)(k_0-k_0'+\mathrm{i}\varepsilon)}, \tag{23.53}$$

$$K_0=\sqrt{K^2+\mu^2}.$$

上式中积分可分为主值积分部分和在 $k_0'=k_0/2$ 与 $k_0'=k_0$ 两个奇点处的半留数.对于实验范围内的 k_0 值,相应于奇点 $k_0'=k_0$ 的 k'^3 值将比在奇点 $k_0'=k_0/2$ 的 k'^3 值大得很多,所以我们可以忽略去在 $k_0'=k_0/2$ 点留数的贡献.我们得

$$D(k)=1-\frac{f^2}{3\pi^2}\int_0^{K_0}\mathscr{P}\frac{k'^3\mathrm{d}k_0'}{(k_0-2k_0')(k_0-k_0')}-\mathrm{i}\frac{f^2}{3\pi}\frac{k^3}{k_0}. \tag{23.54}$$

式中 $\mathscr{P}$ 代表主值. 因为当 $K_0\to\infty$ 时积分是发散的，所以对上式中主值积分的贡献将主要来自 $k_0'\approx K_0$ 的区域. 当 k_0 比 K_0 小得多时，我们可取被积函数对 k_0/k_0'' 的展开并且略去 k_0^2 项. 于是

$$\int_0^{K_0}\mathscr{P}\frac{k'^3\mathrm{d}k_0'}{(k_0-2k_0')(k_0-k_0')}\approx\int_0^{K_0}\frac{k'^3\mathrm{d}k_0'}{2k_0'^2}+\frac{3k_0}{4}\int\frac{k'^3\mathrm{d}k_0'}{k_0'^3}.$$

我们得

$$D(k)=a-bk_0-\mathrm{i}\frac{f^2}{3\pi}\frac{k^3}{k_0},\tag{23.55}$$

式中

$$a=1-\frac{f^2}{3\pi^2}\int_0^{K_0}\frac{k'^3\mathrm{d}k_0'}{2k_0'^2},\quad b=\frac{f^2}{\pi^2}\int_0^{K_0}\frac{k'^3\mathrm{d}k_0'}{4k_0'^3},\tag{23.56}$$

代入(23.52)式得

$$\begin{aligned}T_{3/2\,3/2}(k,k)&=-\frac{2}{kk_0}\frac{a-b'k_0}{(3\pi k_0/f^2k^3)(a-bk_0)-\mathrm{i}},\\ b'&=b-\frac{f^2}{3\pi^2}\int_0^{K}\frac{k'^4\mathrm{d}k'}{k_0'^3}.\end{aligned}\tag{23.57}$$

在上面的解里我们曾忽略去弗雷德霍姆展开解的第二项以后的全部高级项. 戈麦尔[①](Gammel)曾经用数字计算法解积分方程式(23.48)式，发现所得的解和上面弗雷德霍姆近似解是非常相近的. 这说明上面给出的解是相当可靠的近似解. 我们注意到(23.57)并不严格地满足 T 矩阵所应满足的幺正条件. 当(23.57)分母的实数部分等于零时即出现共振现象(这时散射振幅达到一个极大值). 在共振附近，相角移 $\delta_{3/2\,3/2}$ 与 $T_{3/2\,3/2}$ 的关系为

$$T_{3/2\,3/2}=\frac{A}{\cot\delta_{3/2\,3/2}-\mathrm{i}},\tag{23.58}$$

比较(23.57)和(23.58)的分母，我们立刻得到

$$\frac{k^3}{k_0}\cot\delta_{3/2\,3/2}=\frac{3\pi a}{f^2}\left(1-\frac{k_0}{\omega_r}\right),\tag{23.59}$$

式中 $\omega_r=a/b$ 为共振时的 k_0 值. a 实际上代表 f^2 的改变. 我们可以引入

$$f'^2=f^2/a,\tag{23.60}$$

于是(23.59)可写为

$$\frac{f'^2}{3\pi}\frac{k^3}{k_0}\cot\delta_{3/2\,3/2}=(1-k_0/\omega_r).\tag{23.61}$$

上式表示 $k^3\cot\delta_{3/2\,3/2}/k_0$ 是 k_0 的一个线性函数. 这个结果与实验结果是很圆满地相符的.

---

① J. L. Gammel (1954) *Phys. Rev.* **95** 209.

因为上面理论结果里含有两个未知参数 ω_r 和 f'，由实验测出的共振能级和宽度实际上只是用来定出 ω_r 和 f' 的值. 和实验比较给出 $\omega_r \approx 1.4$，$f'^2/4\pi - 0.08$.（这里所用的单位系统为 $\hbar = c = \mu = 1$）

丘(Chew)和骆(Low)[①]由散射振幅的解析性和幺正性出发，导出散射振幅必须满足的丘 骆方程. 这个方程后来证明是和色散关系完全等价的. 丘和骆经过适当的选择和假定也从上述丘 骆方程得到了和(23.61)完全相同的近似解.

§ 24 π-π 相互作用

π 介子和 π 介子的相互作用是我们必须考虑的 一个场和它自己作用的第一个例子. 近年来通过对核子电磁结构的观察以及对 π 介子与核子碰撞所产生的两个或三个 π 介子的激发态的观察，这个作用逐渐为人们所认识. 实验证实两个 P 波的 π 介子之间存在着很强的相互作用. 这个作用使两个 P 波 π 介子形成通常称为 ρ 介子的激发态. 除 ρ 介子激发态外，实验上还发现各种由两个 π 介子和三个 π 介子组成的激发态. 可以想见，在最近一个时期内对 π-π 作用的实验观察和理论的研究将是强相互作用理论的一个重要的课题. 下面我们将首先找出描写 π-π 作用的相互作用拉氏函数. 考虑到各种不变性的要求（如在同位旋空间和普通空间坐标旋转下的不变性等等），我们可写下两个可能的相互作用拉氏函数密度：

$$\mathscr{L}'_{相互} = g\Big(\sum_{\alpha=1}^{3}\varphi_\alpha(x)\varphi_\alpha(x)\Big)^2 \tag{24.1}$$

和

$$\mathscr{L}''_{相互} = g\,\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\Big(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\mu}\varphi_\beta - \varphi_\alpha\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_\mu}\Big)^2, \tag{24.2}$$

式中 α，β 代表介子的同位旋标数. $\mathscr{L}'_{相互}$ 主要将引起两个 π 介子在 S 态的相互作用. $\mathscr{L}''_{相互}$ 由于包含空间的微分将引起两个介子在 S，P 和 D 态的相互作用，上述 ρ 介子激发态的存在表明 P 波相互作用是重要的. 因此由(24.2)式给出的 $\mathscr{L}''_{相互}$ 在 π-π 作用中将占很重要的地位. 在以下的讨论里我们将假定(24.2)式是唯一存在的 π-π 作用.

严格地讲，(24.2)不应解释为"相互"作用，因为现在只有一种 π 介子场存在. (24.2)式和质量项 $\mu^2\sum_{\alpha=1}^{3}\varphi_\alpha\varphi_\alpha$ 一样可以看作是自由介子场的拉氏函数密度里的一个项. 只不过这一项将在克莱因-戈尔登方程式中引入非线性的项，这就使得场的量子不可能保有不变的动量和能量. 场的两个量子可以通过 $\mathscr{L}''_{相互}$ 互相交换能量和动量，和两种不同场相互作用的情形完全一样.

---

① Chew and Low (1956) *Phys. Rev.* **101** 1570.

现在考虑动量和同位旋分量为 $p_1\alpha, p_2\beta$ 的两个始态介子在碰撞后成为动量和同位旋分量为 $p_3\gamma, p_4\lambda$ 的两个末态介子. 散射矩阵元可表示为

$$_0\langle p_3\gamma, p_4\lambda|S|p_1\alpha, p_2\beta\rangle_0,$$

因为每一个介子的同位旋角动量都等于1, 两个介子系统的总同位旋角动量可以为 $T=0,1$ 或 2. 上式可用总同位旋角动量表象表出如下:

$$_0\langle p_3\gamma, p_4\lambda|S|p_1\alpha, p_2\beta\rangle_0 = \sum_{T=0}^{2}\sum_{T_3=-T}^{T}\langle\gamma\lambda|TT_3\rangle\langle p_3 p_4|S_T|p_1 p_2\rangle\langle TT_3|\alpha\beta\rangle$$

$$= \sum_{T=0}^{2}\langle\gamma\lambda|\xi_T|\alpha\beta\rangle\langle p_3 p_4|S_T|p_1 p_2\rangle. \quad (24.3)$$

由于相互作用是同位旋空间的标量, 所以 S_T 与 T_3 无关. 在上式中

$$\xi_T = \sum_{T_3}|TT_3\rangle\langle TT_3| \quad (24.4)$$

称为同位旋 T 态的投影算符. 为着找出 ξ_T 的显式, 我们引入下列同位旋 T 的本征函数:

$$|T=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{\rho=1}^{3}\chi_\rho\chi_\rho',$$

$$|T=1,\sigma\rho\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_\sigma\chi_\rho' - \chi_\rho\chi_\sigma'), \quad (24.5)$$

$$|T=2,\sigma\rho\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_\sigma\chi_\rho' + \chi_\rho\chi_\sigma') - \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{\sigma\rho}\sum_{\tau\neq\sigma}\chi_\tau\chi_\tau'.$$

$\chi_\sigma, \chi_\sigma'$ $(\sigma=1,2,3)$ 代表这两个介子在同位旋空间的波函数. 在同位旋空间的坐标旋转下, 这两个波函数代表两个矢量的分量. $|T=0\rangle$ 是这两个矢量所组成的标量. 因 $|T=1,\sigma\rho\rangle = -|T=1,\rho\sigma\rangle$, $|T=1,\sigma\rho\rangle$ 共有三个独立的分量. 由(24.5)给出的 $|T=2,\sigma\rho\rangle$ 中引入含 $\delta_{\sigma\rho}$ 项是为了使当 $\sigma=\rho$ 时, $|T=2,\sigma\rho\rangle$ 和 $|T=0\rangle$ 正交. 因 $\sum_{\rho=1}^{3}|T=2,\rho\rho\rangle=0$, $|T=2,\sigma\rho\rangle$ 共有五个独立的分量. 这五个分量是 T_3 的五个本征态的线性组合. 很容易看出 $|T=2,\sigma\rho\rangle$ 是由矢量 χ_ρ 所组成的二级对称张量. χ_ρ 作为波函数满足归一化条件

$$\chi_\rho^\dagger\chi_\sigma = \delta_{\rho\sigma}. \quad (24.6)$$

由(24.4)得

$$\xi_0 = |T=0\rangle\langle T=0| = \frac{1}{3}\sum_\rho\chi_\rho\chi_\rho'\sum_\sigma\chi_\sigma^\dagger\chi_\sigma'^\dagger,$$

$$\xi_1 = \sum_{\sigma>\rho}|T=1,\sigma\rho\rangle\langle T=1,\sigma\rho|$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\sigma>\rho}(\chi_\sigma\chi_\rho' - \chi_\rho\chi_\sigma')(\chi_\sigma^\dagger\chi_\rho'^\dagger - \chi_\rho^\dagger\chi_\sigma'^\dagger),$$

$$\xi_2 = \sum_{\sigma\geq\rho(\sigma,\rho\neq 3,3)} |T=2,\sigma\rho\rangle\langle T=2,\sigma\rho|. \tag{24.7}$$

很容易看出上面最后一式的右边只包括五个独立项的和,即$(\sigma\rho)=(2,1),(3,1),(3,2),(1,1)$和$(2,2)$.这个式子显然又可写成下面对1,2,3完全对称的形式:

$$\xi_2 = \frac{1}{3}\left\{\sum_{\sigma\geq\rho(\sigma,\rho\neq 3,3)} + \sum_{\sigma\geq\rho(\sigma,\rho\neq 2,2)} + \sum_{\sigma\geq\rho(\sigma,\rho\neq 1,1)}\right\}|T=2,\sigma\rho\rangle\langle T=2,\sigma\rho|.$$

直接的计算给出

$$\xi_2 = \frac{1}{2}\sum_{\sigma\geq\rho}(\chi_\sigma\chi'_\rho + \chi_\rho\chi'_\sigma)(\chi^+_\sigma\chi'^+_\rho + \chi^+_\rho\chi'^+_\sigma) - \frac{1}{3}\sum_\rho\chi_\rho\chi'_\rho\sum_\sigma\chi^+_\sigma\chi'^+_\sigma. \tag{24.8}$$

由(24.7)和(24.6)两式得

$$\langle\gamma\lambda|\xi_0|\alpha\beta\rangle = \chi^+_\gamma\chi'^+_\lambda\xi_0\chi_\alpha\chi'_\beta = \frac{1}{3}\sum_{\rho=1}^{3}\delta_{\gamma\rho}\delta_{\lambda\rho}\sum_{\sigma=1}^{3}\delta_{\sigma\alpha}\delta_{\sigma\beta} = \frac{1}{3}\delta_{\gamma\lambda}\delta_{\alpha\beta}. \tag{24.9}$$

同样计算给出

$$\begin{aligned}\langle\gamma\lambda|\xi_1|\alpha\beta\rangle &= \chi^+_\gamma\chi'^+_\lambda\xi_1\chi_\alpha\chi'_\beta \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\sigma\geq\rho}(\delta_{\gamma\sigma}\delta_{\lambda\rho} - \delta_{\gamma\rho}\delta_{\lambda\sigma})(\delta_{\sigma\alpha}\delta_{\rho\beta} - \delta_{\rho\alpha}\delta_{\sigma\beta}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{3}\sum_{\rho=1}^{3}(-\delta_{\gamma\sigma}\delta_{\lambda\rho}\delta_{\rho\alpha}\delta_{\sigma\beta} + \delta_{\gamma\sigma}\delta_{\lambda\rho}\delta_{\sigma\alpha}\delta_{\rho\beta}) \\ &= \frac{1}{2}(\delta_{\gamma\alpha}\delta_{\lambda\beta} - \delta_{\gamma\beta}\delta_{\lambda\alpha})\end{aligned} \tag{24.10}$$

和

$$\langle\gamma\lambda|\xi_2|\alpha\beta\rangle = \frac{1}{2}\left(\delta_{\lambda\alpha}\delta_{\lambda\beta} + \delta_{\gamma\beta}\delta_{\lambda\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\gamma\lambda}\delta_{\alpha\beta}\right). \tag{24.11}$$

因为π介子是满足玻色统计的,所以由(24.3)给出的S矩阵元必须是始态两个粒子的对称函数,同时也必须是末态两个粒子的对称函数.由(24.9),(24.10)和(24.11)三式我们看到ξ_0和ξ_2对于始态同位旋变数α,β以及末态同位旋变数γ,λ又都是对称的,但ξ_1对于这两组变数则都是反对称的.为着保证S矩阵元对始态两个粒子以及末态两个粒子的对称性,由(24.3)我们看到$\langle p_3p_4|S_0|p_1p_2\rangle$和$\langle p_3p_4|S_2|p_1p_2\rangle$必须是$p_1,p_2$的(同时也是$p_3,p_4$的)对称函数,但$\langle p_3p_4|S_1|p_1p_2\rangle$则必须是$p_1,p_2$的(也是$p_3,p_4$的)反对称函数.换句话说,在总角动量表象里,$S_0$和$S_2$只可能具有角动量为偶数的项,$S_1$只可能具有角动量为奇数的项.即当$T=0,2$时,

$$\langle p_3p_4|S_T|p_1p_2\rangle = \sum_{J=\text{偶数}}\sum_{J_z}\langle p_3p_4|JJ_z\rangle S_{TJ}(q^2)\langle JJ_z|p_1p_2\rangle; \tag{24.12}$$

当$T=1$时,

$$\langle p_3p_4|S_1|p_1p_2\rangle = \sum_{J=\text{奇数}}\sum_{J_z}\langle p_3p_4|JJ_z\rangle S_{1J}(q^2)\langle JJ_z|p_1p_2\rangle. \tag{24.13}$$

式中

$$q^2 = \sum_{\mu=1}^{4}(k_1+k_2)_\mu(k_1+k_2)_\mu = \sum_{\mu=1}^{4}(k_3+k_4)_\mu(k_3+k_4)_\mu,$$

在质心坐标里代表这两个 π 介子系统的总能量平方的负值.

实验上已经发现两个 π 介子在 $T=1, J=1$ 的态中存在着一个总能量为 780 MeV(百万电子伏)的激发态.这个激发态将使得在 $T=1, J=1$ 态的两个 π 介子的相互散射现象里出现共振.为着在理论上解释这个共振现象,像在 π 介子-核子散射问题里一样,我们也将用塔姆-唐可夫近似方法来处理这个问题,因为当我们从相互作用拉氏函数或哈密顿量出发时,处理共振现象唯一有效的方法是塔姆-唐可夫近似方法.如果我们对介子作非相对论的近似,那么和上节处理 π 介子-核子共振时一样,我们可以忽略所有介子数大于 2 的态.这样,全部的费曼图将如图 14 所示.因为实验上观察到的共振能级约为两个介子的静止质量的两倍以上,在现在所讨论的问题里非相对论近似显然是不能用的,所以我们必须设法把非相对论的塔姆-唐可夫近似推广到相对论领域里去.一个很自然的推广方式是假定图 14 仍是在相对论计算里所需要考虑的全部费曼图.按照我们前面对相对论的费曼图的理解,图 14 中时间 $t_1, t_2, t_3, \cdots$ 的次序是任意的.比如图 14 中过程 c(图 15),d 应包括由图 16 所示的过程.在非相对论近似里图 16 所代表的过程均已略去.在相对论理论里,这些过程将包含在费曼图 14 里.我们注意到这些过程将涉及粒子数大于 2 的态.比如在图 16d′中,在时间间隔 t_2 和 t_1 内,实际存在的粒子数将有六个.下面的讨论将说明,对于有相互作用的场,粒子数将一般不可能是洛伦兹变换下的不变量.在图 17 中表示两个核子分别吸收一个介子的过程,在某一洛伦兹坐标里,$t=$常数是由水平线表示.在这个坐标系里同时存在着两个介子.但如果选取另一洛伦兹坐标系使得 $t'=$常数是由斜线表示,在这个坐标系里介子的总数将只有一个.所以在 0 点的两个同地同时的观察者,由于他们的坐标系的不同,对同一现象所观察到的粒子数是不同的.这说明对粒子数所作的限制一般将不可能是协变的.因此当我们把塔姆-唐可夫近似推广到相对论领域时,放弃对粒子数的限制是十分合理的.

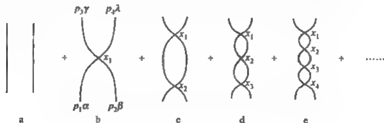


图 14

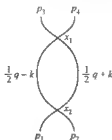


图　15

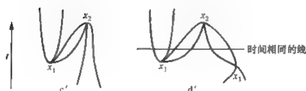


图　16

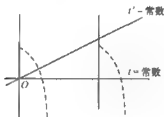


图　17

上述以图 14 中全部费曼图作为塔姆-唐可夫近似的推广，称为贝特-邵皮特尔(Bethe-Salpeter)近似.

相应于图 14 所示的过程，相互作用拉氏函数密度可以写成[①]

$$\mathscr{L}''_{\text{相互}}=\sum_{T=0}^{3}\sum_{\gamma\lambda\alpha\beta}\langle\gamma\lambda|\xi_T|\alpha\beta\rangle\mathscr{L}^{T}_{\gamma\lambda,\alpha\beta}. \tag{24.14}$$

式中当 $T=0,2$ 时，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{T}_{\gamma\lambda,\alpha\beta}=\sum_{\mu=1}^{4}g_T\Big\{&\varphi_\gamma^{[+]}\varphi_\lambda^{[+]}\frac{\partial\varphi_\alpha^{[-]}}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi_\beta^{[-]}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial\varphi_\gamma^{[+]}}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi_\lambda^{[+]}}{\partial x_\mu}\varphi_\alpha^{[-]}\varphi_\beta^{[-]}\\&-\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\varphi_\gamma^{[+]}}{\partial x_\mu}\varphi_\lambda^{[+]}+\varphi_\gamma^{[+]}\frac{\partial\varphi_\lambda^{[+]}}{\partial x_\mu}\Big)\Big(\frac{\partial\varphi_\alpha^{[-]}}{\partial x_\mu}\varphi_\beta^{[-]}+\varphi_\alpha^{[-]}\frac{\partial\varphi_\beta^{[-]}}{\partial x_\mu}\Big)\Big\};\end{aligned} \tag{24.15}$$

当 $T=1$ 时，

① 见胡宁，杨国桢：中国物理学报 **20**，233 (1964) 或中国科学 **12** 317(1963).

$$\mathscr{L}'_{\gamma\lambda,\alpha\beta}=\frac{3}{2}\sum_{\mu=1}^{4}g\left(\frac{\partial\varphi_{\gamma}^{[-]}}{\partial x_{\mu}}\varphi_{\lambda}^{[+]}-\varphi_{\gamma}^{[+]}\frac{\partial\varphi_{\lambda}^{[+]}}{\partial x_{\mu}}\right)$$
$$\times\left(\frac{\partial\varphi_{\alpha}^{[-]}}{\partial x_{\mu}}\varphi_{\beta}^{[-]}-\varphi_{\alpha}^{[-]}\frac{\partial\varphi_{\beta}^{[-]}}{\partial x_{\mu}}\right). \tag{24.16}$$

在(24.15)式中当 $T=0,2$ 时 g_T 分别等于 $2g,-g$. 在(24.15)和(24.16)两式中，$\varphi^{[+]}(x)$ 代表在图 14 中当 $x=x_i$ 时与 $\varphi^{[-]}(x_{i+1})$ 相抵消的算符. 当 $t_i<t_{i+1}$，$\varphi^{[+]}(x_i)$ 代表放出介子的算符，但当 $x_i>x_{i+1}$ 时，$\varphi^{[+]}(x_i)$ 则代表吸收介子的算符，当 $s=1$ 时，$\varphi^{[+]}(x_1)$ 代表放出末态粒子的算符. 在非相对论极限下，$\varphi^{[+]}(x)$ 趋于通常的放出算符 $\varphi^{[+]}(x)$. 按照上面理解，在图 14 中每一根内介子线将相当于 S 矩阵元中的因子

$$\varphi_{\gamma}^{[-]}(x_{i-1})\varphi_{\alpha}^{[+]}(x_i)=\delta_{\gamma\alpha}\Delta_F(x_{i-1}-x_i). \tag{24.17}$$

像在上节一样，我们将先算出由图 14 中费曼图所代表的 S 矩阵级数展开式，然后再设法求级数的和，或找出这个级数所满足的积分方程式. 为着这个目的，我们将首先计算相应于图 15(即图 14c)的 S 矩阵元. 因为现在的目的只是导出 $T=1$，$J=1$ 态的 π-π 共振，我们将只考虑由(24.16)的 $\mathscr{L}_1$ 部分对 S 矩阵的贡献. 这部分的相互作用拉氏函数密度为

$$\mathscr{L}_1=\sum_{\gamma\lambda\alpha\beta}\langle\gamma\lambda|\xi_1|\alpha\beta\rangle\mathscr{L}'_{\gamma\lambda,\alpha\beta}. \tag{24.18}$$

由上式得相应于费曼图 15 的 S 矩阵元为

$$_0\langle p_3\gamma,p_4\lambda|S_2|p_1\alpha,p_2\beta\rangle_0=\frac{-9g^2}{(2\pi)^6q^2}\delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2)$$
$$\times\langle\gamma\lambda|\xi_1|\alpha\beta\rangle(k_1-k_2)\cdot(k_3-k_4)J(q^2), \tag{24.19}$$
$$J(q^2)=\int\frac{k^2\mathrm{d}^4k}{\left[\left(k-\frac{1}{2}q\right)^2+\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon\right]\left[\left(k+\frac{1}{2}q\right)^2+\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon\right]},$$

式中

$$k^2=\sum_{\mu=1}^{4}k_\mu k_\mu=\boldsymbol{k}^2-k_0^2,$$
$$q_\mu=(k_1+k_2)_\mu=(k_3+k_4)_\mu. \tag{24.20}$$

在导出(24.19)时，曾利用

$$\sum_{\alpha'\beta'}\langle\gamma\lambda|\xi_1|\alpha'\beta'\rangle\langle\alpha'\beta'|\xi_1|\alpha\beta\rangle=\langle\gamma\lambda|\xi_1|\alpha\beta\rangle. \tag{24.21}$$

由(24.19)式给出的积分 J 是二次发散的. 与上节所讨论的 π 介子和核子散射问题里的情形一样，这个发散困难的出现意味着介子的结构不能略去. 引入介子的结构等价于在(24.19)式的积分 J 中引入一个收敛因子. 为着使结果保持在洛伦兹变换下的协变性，这个收敛因子必须是洛伦兹变换下的不变量. 我们可以选取收敛因子

使其在通常实验观察范围内的值都为1. 在引入收敛因子使积分 $J(q)$ 变为收敛后，取 $J(q^2)$ 对 $q^2+4\mu^2$ 的展开得

$$J(q^2)=J(-4\mu^2)+(q^2+4\mu^2)\left[\frac{\partial^2}{\partial q^2}J(q^2)\right]_{q^2=-4\mu^2}+J_R(q^2). \quad (24.22)$$

当收敛因子趋于1时，上式右边前两项将趋于无穷大，但 $J_R(q^2)$ 则仍保持有限的值. 这一点可从积分 $J(q^2)$ 的被积函数对 $q^2+4\mu^2$ 的展开看出. 当没有收敛因子时，这个展开式中与 $q^2+4\mu^2$ 无关的项所给出的积分是二次发散的，比例于 $q^2+4\mu^2$ 的项所给出的积分是对数发散的. 这两个发散的积分正是(24.22)式的右边前两项当收敛因子趋于1时的极限. 被积函数展开式中其他项所给出的积分是收敛的并且相应于 $J_R(q^2)$. 这说明当收敛因子趋于1时，$J_R(q^2)$ 仍保持有限的值.

下面我们将进行对 $J_R(q^2)$ 的计算. 如果我们选取收敛因子 $\nu(k^2)$ 使得当 $k^2<K^2$ 时，$v(k^2)=1$，那么当 K 取充分大的值时，$J_R(q^2)$ 的值将与不引入收敛因子时所得的结果一样. 为简单起见，我们将采用质心坐标系. 在质心坐标系里 q_μ 只有时间分量. 在(24.19)中代入 $\mathrm{d}^4k=\mathrm{d}k_0\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}$，并对 $\mathrm{d}k_0$ 进行积分得

$$\begin{aligned}J(q^2)&=\int\frac{k^2\mathrm{d}^4k}{\left[\left(k-\frac{1}{2}q\right)^2+\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon\right]\left[\left(k+\frac{1}{2}q\right)^2+\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon\right]}\\&=2\pi\mathrm{i}\int\frac{\left(2\boldsymbol{k}^2+\frac{1}{4}q^2+\mu^2\right)\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}\,(q^2+4\boldsymbol{k}^2+4\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon)}\\&=4\pi^2\mathrm{i}\int_0^\infty\frac{\left(2\boldsymbol{k}^2+\frac{1}{4}q^2+\mu^2\right)\sqrt{\boldsymbol{k}^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}^2}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}\,(q^2+4\boldsymbol{k}^2+4\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon)}.\end{aligned} \quad (24.23)$$

在上面计算里取对 k_0 的积分时，我们把积分路线看成由 k_0 复平面的实轴和连接实轴的在下半复平面里的无穷半圆所组成的封闭曲线. 由于在无穷半圆上积分之值为零，所以原来沿实轴的积分和沿上述封闭曲线的积分是完全相等的. 在下半复平面内被积函数只有两个奇点 $k_0=\pm\sqrt{-q^2/2}+\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}-\mathrm{i}\varepsilon$，因而积分等于围绕这两个极点的留数积分.

引入

$$\nu=-\frac{q^2}{4}-\mu^2,\quad \nu'=\boldsymbol{k}^2, \quad (24.24)$$

积分(24.23)可写为

$$J(\nu)=\mathrm{i}2\pi^2\int_0^\infty\sqrt{\frac{\nu'}{\nu'+\mu^2}}\mathrm{d}\nu'+\mathrm{i}2\pi^2\nu\int_0^\infty\sqrt{\frac{\nu'}{\nu'+\mu^2}}\frac{\mathrm{d}\nu'}{\nu'-\nu}. \quad (24.25)$$

上式中两个积分都是发散的，但第二个积分可写为

$$\mathrm{i}2\pi^2\nu\int_0^\infty\sqrt{\frac{\nu'}{\nu'+\mu^2}}\frac{\mathrm{d}\nu'}{\nu'-\nu_1}+\mathrm{i}2\pi^2\nu(\nu-\nu_1)\int_0^\infty\sqrt{\frac{\nu'}{\nu'+\mu^2}}\frac{\mathrm{d}\nu'}{(\nu'-\nu)(\nu'-\nu_1)},$$

其中第二个积分是收敛的.计算给出

$$\frac{1}{\pi}(\nu-\nu_1)\int_0^\infty\sqrt{\frac{\nu'}{\nu'+\mu^2}}\frac{\mathrm{d}\nu'}{(\nu'-\nu)(\nu'-\nu_1)}=\alpha(\nu_1)-\alpha(\nu),\qquad(24.26)$$

式中

$$\alpha(\nu)=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\nu}{\nu+\mu^2}}\ln\left(\frac{\sqrt{-\nu}}{\mu}+\frac{\sqrt{-\nu-\mu^2}}{\mu}\right),\quad(\nu<-\mu^2)$$

$$\alpha(\nu)=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{-\nu}{\nu+\mu^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{\nu+\mu^2}{-\nu}},\quad(-\mu^2<\nu<0)\qquad(24.27)$$

$$\alpha(\nu)_\pm=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\nu}{\nu+\mu^2}}\left[\ln\left(\frac{1}{\mu}\sqrt{\nu}+\frac{1}{\mu}\sqrt{\nu+\mu^2}\right)\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right].\quad(\nu>0)$$

由上式我们看到$\alpha(\nu)$作为ν的解析函数在ν的复平面内正实轴上有一割线.当ν由上半平面或下半平面趋于正实轴时,分别趋于$\alpha_+(\nu)$或$\alpha_-(\nu)$. $J(\nu)$可写为

$$J(\nu)=\mathrm{i}2\pi^2\int_0^\infty\sqrt{\frac{\nu'}{\nu'+\mu^2}}\mathrm{d}\nu'+\mathrm{i}2\pi^2\nu\int_0^\infty\sqrt{\frac{\nu'}{\nu'+\mu^2}}\frac{\mathrm{d}\nu'}{\nu'-\nu_1}+\mathrm{i}2\pi^3\nu[\alpha(\nu_1)-\alpha(\nu)].$$

$$(24.28)$$

当我们引入收敛因子$v(k^2)$使积分变为收敛时,如前所述,我们可以选取$v(k^2)$使得对于充分大的K值都满足当$k^2<K^2$时$v(k^2)=1$,这样,$v(k^2)$的引入只是使得(24.28)式右边前两项由发散变为收敛,但对本来是收敛的项$J_R(q^2)$则无影响.引入

$$\alpha_0=\alpha(\nu_1)+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\sqrt{\frac{\nu'}{\nu'+\mu^2}}\frac{\mathrm{d}\nu'}{\nu'-\nu_1},\qquad(24.29)$$

于是(24.28)式可写为

$$J(\nu)=\mathrm{i}J_0+\mathrm{i}2\pi^3\nu[\alpha_0-\alpha(\nu)].\qquad(24.30)$$

当收敛因子$v(k^2)$趋于1时,J_0趋于线性发散,α_0趋于对数发散.因此上式中的J_0和$2\pi^3\nu\alpha_0$两项正是(24.22)式右边的前两项.我们得

$$J_R(q^2)=-\mathrm{i}2\pi^3\nu\alpha(\nu).\qquad(24.31)$$

很容易看出,当$T=1$时,图14中所有的费曼图相应于下面S矩阵的级数

$${}_0\langle p_3\gamma,p_4\lambda|S_{T=1}|p_1\alpha,p_2\beta\rangle_0={}_0\langle p_3\gamma,p_4\lambda|p_1\alpha,p_2\beta\rangle_0$$

$$+(2\pi)^4\delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2)\frac{1}{(2\pi)^{10}q^2}{}_0\langle p_3\gamma,p_4\lambda|T_{T=1}|p_1\alpha,p_2\beta\rangle_0,$$

$$(24.32)$$

$${}_0\langle p_3\gamma,p_4\lambda|T_{T=1}|p_1\alpha,p_2\beta\rangle_0=\langle\gamma\lambda|\xi_1|\alpha\beta\rangle(k_1-k_2)\cdot(k_3-k_4)F(\nu),$$

$$F(\nu)=3\mathrm{i}g+\frac{(3\mathrm{i}g)^2}{(2\pi)^4}J(\nu)+\frac{(3\mathrm{i}g)^3}{(2\pi)^8}J(\nu)^2+\frac{(3\mathrm{i}g)^4}{(2\pi)^{12}}J(\nu)^3+\cdots.\qquad(24.33)$$

(24.33)式右边第一,二,三,……各项分别相当于图 14 中 b,c,d,…各图.当 g 充分小时,这个级数显然等于

$$F(\nu)=\frac{3ig}{1-\frac{3ig}{(2\pi)^4}J(\nu)}=\frac{3ig}{1+\frac{3g}{(2\pi)^4}J_0+\frac{3g}{(2\pi)^4}\cdot 2\pi^3\nu[a_0-a(\nu)]}. \quad (24.34)$$

当 g 不够小而级数变为发散时,我们即可不用(24.33)式而直接以(24.34)作为问题的解.引入

$$g'=g\left[1+\frac{3g}{(2\pi)^4}J_0\right]^{-1}, \quad (24.35)$$

上面结果可写为

$$F(\nu)=\frac{3ig'}{1+\frac{3g'}{8\pi}\nu[a_0-a(\nu)]}. \quad (24.36)$$

上式和前节所给的 π 介子-核子在 $T=3/2, J=3/2$ 态的散射解一样包含两个未知的参数.其中一个参数为 π-π 作用常数 g',另一个参数是 a_0.由(24.29)式我们看到,a_0 只有在引入收敛因子后才是有限的,所以上式中的 a_0 相应于上节 π-N 散射解里的截断参数 K.由(24.30)和(24.35)两式我们看到,J_0 所造成的唯一效果是使作用常数 g 改变为 g'.实验所观察到的作用常数将是 g'而不是 g.关于相互作用导致作用常数的改变的问题将在下一章中进一步地加以讨论.

我们可以选取 g'和 a_0 使得(24.36)式在实验所观察到的共振处给出共振态,并且给出和实验相符的共振宽度.

由于在质心坐标中,

$$(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\cdot(\boldsymbol{k}_3-\boldsymbol{k}_4)=4\nu\cos\theta, \quad (24.37)$$

θ 为 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_3$ 在质心坐标中的夹角,我们看到在同位旋 $T=1$ 态中,只存在 P 波散射.利用(24.27)最后一式,(24.36)可写成

$$F(\nu)=\frac{i8\pi(\nu+\mu^2)^{1/2}\nu^{-3/2}}{\frac{(\nu+\mu^2)^{1/2}}{\nu^{1/2}}\left[\frac{8\pi}{3g'\nu}+a_0-\mathrm{Re}a(\nu)\right]-i}, \quad (\nu>0) \quad (24.38)$$

按照散射的一般理论,上式分母应等于 $\cot\delta-i$,式中 δ 为散射相角移,我们得

$$\nu\sqrt{\frac{\nu}{\nu+\mu^2}}\cot\delta=\frac{8\pi}{3g'}+\nu[a_0-\mathrm{Re}a(\nu)]. \quad (\nu>0)$$

在上式中 $\mathrm{Re}a(\nu)$代表 $a(\nu)$的实数部分.由上式给出的共振能级为

$$\frac{8\pi}{3g'}+\nu[a_0-\mathrm{Re}a(\nu)]=0. \quad (24.39)$$

相角移 δ 作为能量 ν 的函数,可以直接由实验的分析得出.和实验比较指出,g'在 $\hbar=c=\mu=1$ 的单位系统里的值约为 0.1.

上节对于 π-N 散射和这一节对 π-π 散射的共振现象的处理指出，基本粒子的内部结构对共振现象是有影响的. 由于这种内部结构现在还是未知的，因此在散射矩阵中出现新的待定的参数. 这使得我们不可能像原子碰撞问题里的情形那样，由理论完全决定共振的能级和宽度. 如果我们进一步计算较高级近似或另外的散射的共振现象(如 S 波 π-π 散射)，为着消除发散困难，必须引入更多的未知参数①. 我们可以预料，在散射现象全部严格的解中(如果这样的解存在的话)将含有无穷多个这样的参数. 这无穷多个参数将和基本粒子内部结构的未知因素完全等价. 一个含有无穷多个待定参数的理论显然是不能令人满意的，但这正是目前基本粒子理论的真实情况. 在下一章我们将看到，这样的理论代表不可重正化的理论. 我们知道描写电子和电磁场相互作用的理论是可重正化的，在这个理论里除相互作用常数 e 和电子质量 m 以外，在计算过程中不再需要引入新的参数. 自从 1959 年重正化理论建立以后，人们曾经希望所有的基本粒子相互作用理论都是可重正化的，但不久即发现 β 衰变作用理论是不可重正化的，非相对论的 π 介子核子作用的理论也是不可重正化的. 这说明在人们能够对基本粒子相互作用得出严格的描绘之时，必须认真处理基本粒子的内部结构.

有些人认为，既然在不可重正化理论里存在着这样大的不确定性，那么，在计算开始时所引入的相互作用拉氏函数密度，将不可能完全地描绘基本粒子间客观存在的相互作用. 在若干年来发展出的“色散关系”理论里，人们从散射矩阵的解析性和幺正性出发，再在高级近似里估计到所谓“交叉对称性”的影响，而根本不假定通常理论里所引入的相互作用拉氏函数. 人们由此得出散射振幅所必须满足的“色散关系”. 但不久人们发现色散关系最普遍解里也将含有无穷多个未知的参数. 这和我们前面所讨论的不可重正化理论的情况是相似的，因此这无穷多个参数也将反映着未知的基本粒子的内部结构. 现在用色散关系处理散射问题时一般都引入下面两个近似的假定：(i)必须选取满足所有的条件的“最简单”的解，也就是尽量选取参数最少的解；(ii)限制在色散关系中出现的态的粒子数，实际上只考虑粒子数不大于 2 或 3 的态. 假定(ii)是和我们在塔姆-唐可夫近似里所用的近似完全相同的. 事实上用色散关系所得出的最低级的近似解一般都和用塔姆-唐可夫近似所得到的解完全相同. 比如，在上节所讨论的 π-N 散射问题里，作为色散关系在非相对论近似下的形式，丘(Chew)-骆(Low)方程所给出的解和由塔姆-唐可夫近似得出的解(23.59)式完全相同. 本节所给的塔姆-唐可夫近似解(24.36)式，事实上是由福慈斯尔(Frazer)和佛尔科(Fulco)首先通过色散关系得出的.

因为在本书中我们只考虑以正则描述为出发点的理论，将不对色散关系理论

---

① 参阅 152 页注中所引文献.

作具体的介绍.必须指出色散关系理论的重要部分还涉及散射振幅的解析性和因果关系相联系的问题.这些问题的澄清将有助于发展新理论.这个情况和在量子场论产生以前,在二次量子化表象里的非相对论量子理论是非常相似的.我们知道,二次量子化本身并没有包含任何比薛定谔理论更新的内容,但它却为量子场论的发展打下了基础.至于现在的色散关系能否起着过去二次量子化理论所起的作用,这是只有将来的基本粒子理论的发展才能够解答的问题.

第六章　重正化理论

§25　量子场论里的发散困难

在前面两章里我们曾经利用 S 矩阵处理一些碰撞问题. 在有些例子里我们只考虑了最低级的微扰近似. 当碰撞现象只涉及电磁相互作用时，计算结果和实验符合得非常好. 这说明至少在电磁现象里，场的量子理论的确反映着客观的规律. 但是当我们进一步计算高一级的微扰论修正时，所得的结果都包含有发散的积分. 在 §15 中给出的对康普顿散射的 e^4 级的散射矩阵元的计算结果是一个标准的例子. 在这个例子里，我们所得到的相当于 §15 图 3 中费曼图的散射矩阵元包含一个发散的积分，这就是通常所称的"发散困难". 鉴于在量子电动力学里，最低级的微扰计算都给出正确的结果，在一个很长的时期内，人们认为，所有高级的微扰修正都是没有物理意义的，是应该不予考虑的.

发散困难的存在说明现在的量子电动力学不可能是最后的和正确的理论，但由于它的最低级的微扰计算给出正确的结果，因此这个理论还部分地反映着客观现实，可以作为在找到正确理论以前的过渡性理论.

在 1947 年，由于微波技术的发展，人们有可能测量氢原子 $2s$ 和 $2p$ 态的能级差. 根据狄拉克电子理论，这两个能级是相同的. 但如果考虑电子和电磁辐射的作用，这两个态的能级可能有差异. 根据场论的计算，这个能级的差异属于高级的微扰修正. 过去，这个计算结果存在有发散困难. 如果我们认为高级微扰没有物理意义，那么氢原子的 $2s$ 和 $2p$ 态的能级就不可能有任何差异.

但是，测量的结果证实了氢原子 $2s$ 和 $2p$ 态的能级的确有微小的差异. 这就使人们不能不考虑高级微扰近似所给出的发散结果的物理意义.

进一步的分析指出，上述高级微扰计算结果可以分为两部分：一部分代表由于电磁作用所造成的电子的"不可观察"的质量和电荷的改变，另一部分是代表可观察效应的高级微扰修正. 前一部分含有计算结果中的发散部分，后一部分则是计算结果中的有限部分.

下面我们将说明一下所谓"不可观察"这一词的涵义. 我们先考虑经典电动力学里的一个情况. 当一个电荷 q 由真空中放进一个介质中时，由于介质在电荷 q 的作用下所产生的"极化"现象，使得这个电荷的有效值变小. 在场的量子理论里，电子和电磁场的相互作用也使在电子周围的真空里存在着极化现象. 这个现象使得

电子的电荷也变小了. 因为电子的周围永远存在着它自己所产生的电磁场,上述真空中的极化现象永远是存在的,因此人们就不可能测量电子原来的电荷. 这正像当人们在无法把电荷从介质中取出时,就不能测量它原来的电荷 q 一样.

根据场论计算,电子和它周围的电磁场相互作用而引起的电荷改变是一个发散的积分. 但是上面的讨论指出这个改变是"不可观察"的. 在实验中所测量到的电子电荷的值 $e=4.80\times10^{-10}$ 静电单位是在电子和电磁场作用下,电荷受到改变以后的有效值. 人们既然不能观察到这个电荷的改变量,因此这个量的发散与否,不会导致任何观察上的效果.

电子和电磁场的作用,除了由于真空极化效应引起电荷的改变以外,还引起质量的改变. 这个质量的改变在经典电动力学里已经存在,因此,不像电荷的改变那样纯粹是量子力学的效应. 在经典电动力学里,当一个带电的质点运动时,它的总动能等于这个质点的机械动能 E_m,再加上随着这个电荷运动的电磁场的动能 E_e,即

$$E = E_m + E_e,$$

在非相对论理论里,E_m 可以写成 $m_0v^2/2$,式中 m_0 为质点的机械质量,v 为运动速度. 计算指出 E_e 也与 v^2 成正比,我们可写

$$E_e = \frac{1}{2}\delta m \cdot v^2,$$

δm 代表质点的电磁质量. 用任何力学方法所测得的这个质点的质量应为 $m=m_0+\delta m$. 因为质点的机械质量 m_0 是无法测量的,所以 δm 也是"不可观察"的量.

在经典电动力学里,当我们把电荷看成一个几何的点时,δm 的值即等于无穷大. 所以在经典理论里,一个点电荷的质量改变已经是一个发散的量.

在量子电动力学里,光子和电子都被看成是几何的点. 这表现在当我们考虑电子和光子的相互作用时,我们假定只有当电子和光子的坐标完全重合时才有相互作用. 像在经典电动力学里的情形一样,这是量子理论里电子的质量改变 δm 和电荷改变 δe 等于无穷大的基本原因.

δm 和 δe 虽然不可能被直接观测,但电子的内部结构则是可观察的量. 当能量很高时,这个内部结构将会在可观察的现象里反映出来. 现在有很多基本粒子的研究中心从事于建造超高能的电子加速器,目的就是要观察电子的结构. 在知道了电子和光子的结构以后,我们就可以算出 δm 和 δe 的值. 在这个意义上 δm 和 δe 就成为可观察的量了. 算出的值将不再是无穷大,因为这时电子和光子已不是几何的点而是有内部结构的电荷和质量的分布. 所以在量子场论里 δm 和 δe 的计算中存在有发散困难,正说明基本粒子的内部结构不应忽视.

在第二章中的自由场的理论里,我们曾经指出:一个物理量在洛伦兹坐标变换下的协变性是人们借以认识这个物理量的一个重要的标志. 为着区分开在 S 矩

阵的高级微扰计算结果里代表质量和电荷改变的发散部分和代表散射修正的有限部分，我们也可以利用这些物理量在洛伦兹变换下所表现的不同的协变性. 但在 1947 年以前量子电动力学的描述里，为着强调只有电磁场的横场部分中存在有光子，一般先把电磁场区分为横场和非横场，然后只对横场进行量子化，这样就使得理论的推导结果不能明显地显示出在洛伦兹变换下的协变性，因为把电磁场区分为横场和非横场是与坐标系的选择有关的：在不同的洛伦兹坐标里横场和非横场的区分是不相同的. 这是长期以来，人们不能分辨上述质量的改变和电荷的改变以及它们对 S 矩阵的高级微扰修正的主要原因.

当 1947 年氢原子 $2s$ 和 $2p$ 态的能级差异被观察到以后，人们把量子电动力学重新表述成洛伦兹协变的形式. 在这个新的表述里，不再区分电磁场的横场和非横场，正像我们在 §9 中所做的那样. 由此得出的 S 矩阵充分地显示出计算结果的协变性. 应用这个协变形式的 S 矩阵的微扰论的展开式，不独使得计算大为简化，并且也使得从发散的结果里区分出代表可观察的高级修正项变得非常容易.

在得出代表可观察效应的项以后，下一步的问题是怎样处理这些代表 δm 和 δe 的发散积分. 为着回答这个问题，我们将在下几节中先给出在几个实际例子中出现的发散积分，并且通过这些例子说明怎样从这些发散的结果中，区分开代表高级微扰修正的可观察量. 在那个时候将可以更容易地回答上面所提出的问题.

§26 电子和光子的自能积分和顶角的放射修正

在本节我们将讨论由下面三个费曼图所代表的发散积分. 这些图可以是较复杂的费曼图的一个组成的部分. 比如图 18a 就是 §15 中图 3 的一部分. 因此这些图的外线在一般情况下不应理解为代表自由的粒子，即相应的动量变数 p_μ, q_μ 等不一定满足条件 $p^2=-m^2$ 和 $q^2=0$. 图 18a 和图 18b 称为电子和光子的“自能”费曼图. 因为这个过程导致单个电子或光子总能量的改变. 图 18c 代表顶点的放射修正，因为它由组成一个顶点的电子线放出和吸收光子 k 所造成.

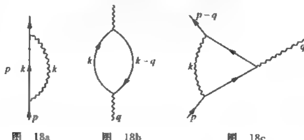


图 18a　　图 18b　　图 18c

在 §15 中我们已经看到，在费曼图中插入图 18a 等于在矩阵元中引入发散的

积分

$$K(p)=\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\sum_{\rho=1}^{4}\int d^4k\gamma_\rho\frac{i(\hat{p}-\hat{k})-m}{(p-k)^2+m^2-i\varepsilon}\gamma_\rho\frac{1}{k^2-i\varepsilon}. \tag{26.1}$$

因为$(p-k)^2=(\hat{p}-\hat{k})^2$，上式又可写为

$$K(\hat{p})=\sum_{\rho}\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\gamma_\rho\frac{i(\hat{p}-\hat{k})-m}{(\hat{p}-\hat{k})^2+m^2-i\varepsilon}\gamma_\rho\frac{1}{\hat{k}^2-i\varepsilon}. \tag{26.2}$$

命 $F(\hat{p},\hat{k})$代表上面积分的被积函数，根据泰勒(Taylor)定理我们可写

$$F(\hat{p},k)=F(im,\hat{k})+(\hat{p}-im)\left[\frac{\partial}{\partial\hat{p}}F(\hat{p},\hat{k})\right]_{\hat{p}=im}$$
$$+(\hat{p}-im)^2F_1(\hat{p},\hat{k}). \tag{26.3}$$

引人

$$J_0=\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4kF(im,\hat{k}),$$
$$J_1=\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\left[\frac{\partial}{\partial\hat{p}}F(\hat{p},\hat{k})\right]_{\hat{p}=im}, \tag{26.4}$$
$$K_1(\hat{p})=\frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4kF_1(\hat{p},\hat{k}).$$

于是(26.2)可写为

$$K(\hat{p})=J_0+(i\hat{p}+m)J_1+(i\hat{p}+m)^2K_1(\hat{p}). \tag{26.5}$$

这里对发散积分的处理是和我们在§24中所做的完全相同的．由 $F(im,\hat{k})$，$[\partial F(\hat{p},\hat{k})/\partial\hat{p}]_{\hat{p}=im}$和$F_1(\hat{p},\hat{k})$等函数在$\hat{k}$很大时的渐近行为，很容易看出：$J_0$是线性发散的，$J_1$是对数发散的，而$K_1(\hat{p})$则是有限的．

我们注意到J_0和J_1在洛伦兹变换下是一个不变量．假定经过一个洛伦兹变换，p_μ变为p'_μ，$\hat{p}=(\gamma p)$变为$\hat{p}'=(\gamma p')$，那么(26.5)式将变为

$$K(\hat{p}')=J_0+i(\hat{p}'-im)J_1-(\hat{p}'-im)^2K_1(\hat{p}').$$

这说明(26.5)式各项具有明确的协变性．以后我们将证明J_0代表质量的改变，J_1代表电荷的改变．

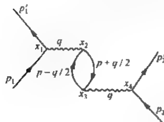


图 19

其次，我们考虑光子的自能图18b．利用§17最后所给出的由费曼图得出S矩阵元的程序并利用(17.21)式，我们很容易得出相应于图18b的发散积分．为具体起见，我们考虑由图19给出的过程．这个过程代表对摩勒(Møller)散射的高级微扰修正．相当于这个过程的S矩阵元为

$$
{}_0\langle \boldsymbol{p}_1' r', \boldsymbol{p}_2' s' | S_4 | \boldsymbol{p}_1 r, \boldsymbol{p}_2 s\rangle_0 = \frac{ie^2}{(2\pi)^2}\delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2)\frac{m^2}{\sqrt{p_{10}p_{20}p_{10}'p_{20}'}}
$$

$$
\times \sum_{\mu\nu}\bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}_1')\gamma_\mu u_r(\boldsymbol{p}_1)\frac{1}{q^2 - i\varepsilon}K_{\mu\nu}(q)\frac{1}{q^2 - i\varepsilon}
$$

$$
\times \bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}_2')\gamma_\nu u_s(\boldsymbol{p}_2), \tag{26.6}
$$

式中 $q = p_1' - p_1$,

$$
K_{\mu\nu}(q) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4 p \mathrm{Sp}\Big[\frac{i(\hat{p} - \hat{q}/2) - m}{(p - q/2)^2 + m^2 - i\varepsilon}
$$

$$
\times \gamma_\mu \frac{i(\hat{p} + \hat{q}/2) - m}{(p + q/2)^2 + m^2 - i\varepsilon}\gamma_\nu\Big]. \tag{26.7}
$$

很容易看出这个积分是不大于二次发散的.

$K_{\mu\nu}(q)$作为一个二级张量并且作为 q_μ 的函数在最普遍的情况下必须由下列形式表出:

$$
K_{\mu\nu} = q_\mu q_\nu K_1(q^2) + \delta_{\mu\nu}K_2(q^2). \tag{26.8}
$$

下面我们将指出,由于电荷守恒定律,$K_1(q^2)$和 $K_2(q^2)$不可能是互相独立的.

(26.6)式可以写为

$$
{}_0\langle \boldsymbol{p}_1' r', \boldsymbol{p}_2' s' | S_4 | \boldsymbol{p}_1 r, \boldsymbol{p}_2 s\rangle_0 = \frac{ie}{(2\pi)^3}\delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2)\frac{m}{\sqrt{p_{10}p_{10}'}}
$$

$$
\times \sum_{\mu}\bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}_1')\gamma_\mu u_r(\boldsymbol{p}_1)\frac{1}{q^2 - i\varepsilon}j_\mu(q), \tag{26.9}
$$

$$
j_\mu(q) = \sum_\nu \frac{2\pi e m}{\sqrt{p_{20}p_{20}'}}K_{\mu\nu}(q)\frac{1}{q^2 - i\varepsilon}\bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}_2')\gamma_\nu u_s(\boldsymbol{p}_2). \tag{26.10}
$$

$j_\mu(q)$可看成电流密度 $j_\mu(x_2)$的傅里叶分量

$$
j_\mu(x_2) = \int j_\mu(q)e^{iqx_2}d^4 q. \tag{26.11}
$$

上式给出的 $j_\mu(x_2)$可看成是吸收在 x_1 点放出的光子 q 的有效电荷-电流分布. 这个电荷-电流分布实际上包括电子 2 本身的电荷-电流和由它所诱导出来的真空极化效应所产生的电荷-电流. 上式显然必须满足电荷守恒定律,

$$
\sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_\mu}j_\mu(x) = 0. \tag{26.12}
$$

在上式中代入(26.11)式立刻给出

$$
\sum_{\mu=1}^4 q_\mu j_\mu(q) = 0. \tag{26.13}
$$

再在上式中代入(26.10)和(26.8)式,我们得

$$
q_\mu K_{\mu\nu}(q) = [q^2 K_1(q^2) + K_1(q^2)]q_\mu = 0, \tag{26.14}
$$

即 $K_2(q^2) = -q^2 K_1(q^2)$,这就证明了 $K_1(q^2)$和 $K_2(q^2)$不是互相独立的函数. 于是

(26.8)式可写为

$$K_{\mu\nu}(q)=(q_\mu q_\nu-\delta_{\mu\nu}q^2)K_1(q^2). \tag{26.15}$$

命 $F_{\mu\nu}(q,p)$ 为积分(26.7)的被积函数，对 q 进行展开得

$$F_{\mu\nu}(q,p)=(q_\mu q_\nu-\delta_{\mu\nu}q^2)F(q^2,p). \tag{26.16}$$

如果略去 $F_{\mu\nu}(q,p)$ 对积分没有贡献的部分，上式是给出(26.15)的唯一可能. 由 $F_{\mu\nu}(q,p)$ 在 q_μ 和 p_μ 都很大时的渐进行为，很容易看到 $K_1(q^2)$ 由下面积分给出

$$K_1(q^2)=\int d^4pF(q^2,p), \tag{26.17}$$

这个积分是对数发散的. 引入

$$F_1(q^2,p)=F(q^2,p)-F(0,p),$$

(26.17)可写为

$$K_1(q^2)=C+\int d^4pF_1(q^2,p), \tag{26.18a}$$

式中

$$C=\int d^4pF(0,p). \tag{26.18b}$$

积分(26.18b)是对数发散的，(26.18a)式右边第二个积分则是收敛的.

以(26.15)和(26.18a)两式代入(26.6)式，我们得到发散部分为

$$\begin{aligned}{}_0(\boldsymbol{p}_1'r',\boldsymbol{p}_2's'|S_4|\boldsymbol{p}_1r,\boldsymbol{p}_2s)_0=&\frac{ie}{(2\pi)^2}\delta^4(p_1'+p_2'-p_1-p_2)\frac{m}{\sqrt{p_{10}p_{20}p_{10}'p_{20}'}}\\&\times\sum_{\mu\nu}\bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}_1')\gamma_\mu u_r(\boldsymbol{p}_1)\frac{1}{q^2-i\varepsilon}(q_\mu q_\nu-\delta_{\mu\nu}q^2)C\frac{1}{q^2-i\varepsilon}\\&\times\bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}_2')\gamma_\nu u_s(\boldsymbol{p}_2),\quad(q=p_1'-p_1=p_2-p_2')\end{aligned}$$

由电荷守恒定律(26.12)和(26.13)得

$$\sum_\nu q_\nu j_\nu(q)=\sum_\nu q_\nu\bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}_2')\gamma_\nu u_s(\boldsymbol{p}_2)=0.$$

$j_\nu(q)$ 代表电子 2 的电流. 于是

$$\begin{aligned}{}_0(\boldsymbol{p}_1'r',\boldsymbol{p}_2's'|S_4|\boldsymbol{p}_1r,\boldsymbol{p}_2s)_0=&-\frac{ie^2}{(2\pi)^2}\delta^4(p_1'+p_2'-p_1-p_2)\frac{m^2}{\sqrt{p_{10}p_{20}p_{10}'p_{20}'}}\\&\times\sum_{\mu=1}^4\bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}_1')\gamma_\mu u_r(\boldsymbol{p}_1)\frac{1}{q^2-i\varepsilon}q^2C\frac{1}{q^2-i\varepsilon}\\&\times\bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}_2')\gamma_\mu u_s(\boldsymbol{p}_2).\end{aligned} \tag{26.19}$$

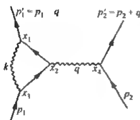


图 20

下一节的讨论将证明发散积分 C 代表电荷的改变，(26.18a)式右边第二项则代表可观察的效应.

最后，我们考虑费曼图 18c. 这个图也可看成一个较复杂费曼图的组成部分. 为简单起见我们可以考虑由图

20 给出的过程. 这个过程也是对电子摩勒散射的一个高级微扰修正. 如果我们略去通过 x_4 的电子线, 那么这个图即变成图 18c. 相应于图 20 中过程的散射矩阵元为

$$
{}_0\langle \boldsymbol{p}_1' r', \boldsymbol{p}_2' s' | S_4' | \boldsymbol{p}_1 r, \boldsymbol{p}_2 s\rangle_0 = \frac{ie^2}{(2\pi)^2}\delta^4(p'+k'-p-k)\frac{m^2}{\sqrt{p_{10}p_{20}p_{10}'p_{20}'}}
$$
$$
\times \bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}_1')L_\nu u_r(\boldsymbol{p}_1)\frac{1}{q^2-\mathrm{i}\varepsilon}\bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}_2')\gamma_\nu u_s(\boldsymbol{p}_2), \tag{26.20}
$$

$$
L_\nu(q,\hat{p}_1) = \sum_\mu \frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\gamma_\mu \frac{\mathrm{i}(\hat{p}_1'-\hat{k})-m}{(\hat{p}_1'-\hat{k})^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}
$$
$$
\times \gamma_\nu \frac{\mathrm{i}(\hat{p}_1-\hat{k})-m}{(\hat{p}_1-\hat{k})^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\mu\frac{1}{k^2-\mathrm{i}\varepsilon}. \tag{26.21}
$$

很容易看出(26.21)式的积分是对数发散的. 以 $F_\nu(\hat{p}_1,q,k)$ 代表(26.21)式的被积函数, 并引入

$$
F_{1\nu}(\hat{p}_1,q,k) = F_\nu(\hat{p}_1,q,k) - F_\nu(\mathrm{i}m,0,k). \tag{26.22}
$$

于是(26.21)式可写为

$$
L_\nu(q,\hat{p}_1) = L_\nu(0,\mathrm{i}m) + \frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^4}\int F_{1\nu}(\hat{p},\hat{p}_1',q,k)\mathrm{d}^4k, \tag{26.23}
$$

式中

$$
L_\nu(0,\mathrm{i}m) = \frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4kF_\nu(\mathrm{i}m,0,k) = \sum_\mu\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4k\gamma_\mu\frac{\mathrm{i}\hat{k}+2m}{(\mathrm{i}m-\hat{k})^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}
$$
$$
\times\gamma_\nu\frac{\mathrm{i}\hat{k}+2m}{(\mathrm{i}m-\hat{k})^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\mu\frac{1}{k^2-\mathrm{i}\varepsilon}. \tag{26.24}
$$

(26.22)式右边两项的积分虽然都是对数发散的, 但它们的差, 即 $F_{1\nu}(\hat{p}_1,q,k)$ 的积分则是收敛的. 积分(26.24)作为一个矢量, 显然可以写成

$$
L_\nu(0,\mathrm{i}m) = \gamma_\nu L. \tag{26.25}
$$

由于(26.24)右边的积分是发散的, 所以上式右边的 L 是一个无穷大的常数.

在下一节的讨论里, 我们将指出 L 代表电荷的改变.

在前面我们曾经考虑了费曼图 18b 和 18c 对电子的摩勒散射的高级修正. 很容易看到图 18a 也同样对摩勒散射的高级修正有贡献, 相应的费曼图由图 21a 和图 21b 给出. 相应于图 21a 的 S 矩阵元为

$$
{}_0\langle \boldsymbol{p}_1' r', \boldsymbol{p}_2' s' | S_4'' | \boldsymbol{p}_1 r, \boldsymbol{p}_2 s\rangle_0 = \frac{-\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^2}\delta^4(p_1'+p_2'-p_1-p_2)\frac{m^2}{\sqrt{p_{10}p_{20}p_{10}'p_{20}'}}
$$
$$
\times\sum_\nu\bar{u}_{r'}(\boldsymbol{p}_1')\gamma_\nu\frac{\mathrm{i}\hat{p}_1-m}{p_1^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}K(p_1)u_r(\boldsymbol{p}_1)\frac{1}{q^2-\mathrm{i}\varepsilon}\bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}_2')\gamma_\nu u_s(\boldsymbol{p}_2'). \tag{26.26}
$$

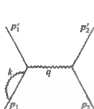


图 21a

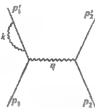


图 21b

式中 $K(p_1)$由(26.2)和(26.5)给出.因此上式中含有电荷改变的发散项可写为

$$\frac{e^2}{(2\pi)^2}\delta^4(p_1'+p_2'-p_1-p_2)\frac{m^2}{\sqrt{p_{10}p_{20}p_{10}'p_{20}'}}u_{r'}(p_1')\gamma_\nu\frac{\mathrm{i}\hat{p}_1-m}{p_1^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}$$

$$\times(\hat{p}_1-\mathrm{i}m)J_1u_r(p_1)\frac{1}{q^2-\mathrm{i}\varepsilon}\bar{u}_s(p_2')\gamma_\nu u_s(p_2). \tag{26.27}$$

同样得相应于图 21b 的 S 矩阵元包含 J_1 的项为

$$\frac{e^2}{(2\pi)^2}\delta^4(p_1'+p_2'-p_1-p_2)\frac{m^2}{\sqrt{p_{10}p_{20}p_{10}'p_{20}'}}\bar{u}_{r'}(p_1')(\hat{p}_1'-\mathrm{i}m)J_1$$

$$\times\frac{\mathrm{i}\hat{p}_1'-m}{p_1'^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\nu u_r(p_1)\frac{1}{q^2-\mathrm{i}\varepsilon}\bar{u}_{s'}(p_2')\gamma_\nu u_s(p_2). \tag{26.28}$$

具体的计算(这个计算将不在本节内给出)指出,(26.21)中代表电荷改变的发散项和(26.27)及(26.28)恰好抵消.这说明在前面所讨论的 e^4 级摩勒散射的矩阵元中只有相应于图 19 的矩阵元包含由 C 代表的电荷改变量.图 20,21a 和 21b 中代表电荷改变的项互相抵消.这证实了我们在上节中所述的观点,即电荷的改变是由真空极化效应产生的,因为图 19 所代表的过程是真空在电子作用下放出和吸收一对正负电子的现象.在下一节中我们将指出,(26.21)式中含 L 项和(26.27)及(26.28)相互抵消是由于电磁作用的规范不变性所造成的.

以上的讨论指出,当我们考虑电子的摩勒散射的 e^2 级的微扰修正(这个修正是由 S 矩阵中 e^4 级的项给出的)时,图 18 所给出的电子和光子的自能图以及顶点放射修正是仅有的三个导致发散积分的费曼图的组成部分.如果我们考虑康普顿散射的 e^2 级的微扰修正,也将得到同样的结论.因此 J_0,J_1,C 和 L 是在这些 S 矩阵里出现的全部的发散积分.这四个发散积分也是在计算氢原子的 $2s$ 和 $2p$ 态由于电子和电磁辐射作用而引起的能级差异时必须解决的发散困难.本节的目的只是指出怎样用协变的方式由 e^2 级的微扰修正里区分出四个发散的积分来.利用 § 24 所给出的方法算出这些积分的有限部分并不困难.因此在本节中没有作任何具体的运算.在下一节中我们将证明这四个发散的积分代表"不可观察"的质量和电荷的改变.

图 18 所示的三个费曼图的部分实际上代表对于组成费曼图的基本单元即电

子线、光子线和顶点的放射修正. 在这些单元上插入一根或两根电子或光子的内线即得出图 18 所示的三个图. 这三个图代表对上述三个基本单元最简单最低级的放射修正(即放出和吸收中间粒子所造成的高级修正). 对上述三个基本单元更高级的放射修正(如图 22 所示)将会给出新的发散积分. 现在的问题是: 对这三个基本单元的各级的放射修正是不是发散困难的唯一的来源? 我们知道,凡是对上面这个问题给出肯定的答案的相互作用,都可在 S 矩阵里完全地逐项消除掉发散困难. 这种相互作用称为可重正化的相互作用. 电磁相互作用是可以重正化的,但 β 衰变作用则是不可重正化的. 在 π 介子和核子的相互作用中,赝矢量耦合是不可重正化的,赝标量耦合除了上面三种发散图相应的图形以外,尚有第四种发散图. 如果我们再引入由图 23 所示由四个介子线组成的顶点,这个顶点相应于下面给出的 π-π 相互作用,

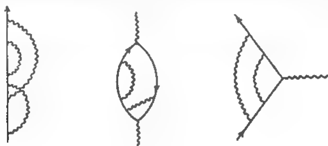


图　22



图　23

$$\mathscr{L}'_{相互} = g_\pi \sum_{\rho=1}^{3} (\varphi_\rho(x)\varphi_\rho(x))^2. \tag{26.29}$$

这正是我们在 §24 中引人的第一种相互作用(24.1)式. g_π 为这个 π π 作用的作用常数,那么上述第四种发散积分的发散部分可以看成是对作用常数 g_π 的改变. 图 24 给出属于第四种发散图的几个例子. 上面结果说明在赝标量耦合(21.21)和 π-π 作用(26.29)下所描述的 π 介子-核子系统碰撞现象的 S 矩阵里的发散困难是可以通过重正化处理予以消除的.

当有更多种新类型的发散图存在时,按照上面的处理方法,为着消除发散困难,必须引入更多的原始相互作用. 这样就使得理论里包含更多的独立的作用常

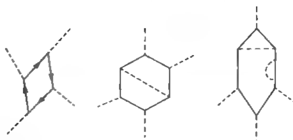


图 24

数.当发散图的种类有无穷多个时,这相当于赝矢量耦合的情况.这时如果利用上面处理方法消除发散困难即使是可行的,也必须在相互作用拉氏函数密度里引人无穷多个参数.在一般情形下,这相应于不可区域化的相互作用.

§27 利用"抵消项"消去发散困难的重正化理论

一个全面的重正化理论必须包含下面三个部分:(i)证明导致发散困难的费曼图的种类只有有限个,(ii)给出怎样用协变的方式区分开所得的计算结果中的发散部分和有限部分,(iii)证明所区分开的发散部分只代表"不可观察"的质量改变和电荷改变(或其他作用常数的改变),并给出消除这些发散部分的步骤.如果我们企图对整个 S 矩阵的展开级数严格地按照上面所述的三个部分讨论并按照旧的处理方式详细地介绍重正化理论,论述和推算将变得异常的繁复和冗长.这将超出本节所要考虑的范围.下面我们将介绍一个较简单的处理方式.

在古柏特(Gupta)和塔克答(Takeda)的创始下,马丘斯(Matthews)和萨拉姆(Salam)在 1954 年提出了对重正化理论的一个新的处理方式[①].这个新的处理方式更充分地利用了所谓"抵消项"的作用.在过去的重正化理论里,人们只在处理质量重正化时利用了抵消项,但在处理电荷重正化时,作了一些较为复杂的考虑.这是使得论述变得很复杂的主要原因之一.如果采用马丘斯和萨拉姆所给出的处理方式,论述和计算将大为简化,并且避免了旧理论在处理所谓"交缠发散"积分和外线重正化时所遇到的困难.

马丘斯和萨拉姆所给出的新的处理方式和旧的处理方式另一个重要的差别是:前者是以相互作用拉氏函数表达出的 S 矩阵展开式(14.28)为出发点的,而后者则是以相互作用哈密顿量表达出的 S 矩阵展开式(14.29)为出发点的.

---

① S. N. Gupta, (1951) *Proc. Phys. Soc.* **A64** 426; G. Takeda (1952) *Progr. Ther. Phys* **7** 359; Matthews and Salam, (1954) *Phys. Rev.* **94** 185.

因为在电动力学里高级的微扰修正中的可观察部分通常是很小的. 如氢原子 $2s$ 与 $2p$ 态能级的差异只为电子静止质量的 10^{1} 分之一. 所以很高级的和复杂的费曼图没有实际观测上的意义. 因此在这一节里我们对重正化理论的兴趣将主要集中于低级微扰项. 对于这些项导致发散困难的费曼图将只会是有限个,区分开发散部分和有限部分的处理也将大致和 § 24 以及前节所给出的方法相同. 在本节的末尾我们将介绍一下怎样处理过去造成一些困难的所谓“交缠发散”的积分. 在下面我们只讨论重正化理论的第三个部分,即怎样消除已被区分开的发散困难.

描写电子和光子系统的总拉氏函数密度可写为

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{电子}+\mathscr{L}_{电磁}+\mathscr{L}_{相互}, \tag{27.1}$$

$$\mathscr{L}_{电子}=-\frac{1}{2}\bar{\psi}\sum_{\mu}\gamma_{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\psi+\frac{1}{2}\sum_{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi-m_0\bar{\psi}\psi, \tag{27.2}$$

$$\mathscr{L}_{电磁}=-\frac{1}{2}\sum_{\mu}\sum_{\nu}\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}}\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}}, \tag{27.3}$$

$$\mathscr{L}_{相互}=\mathrm{i}e_0\sum_{\mu=1}^{4}\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi A_{\mu}. \tag{27.4}$$

在上式中 m_0 和 e_0 代表电子的原始(机械)质量和原始电荷. 由(27.3)给出的 $\mathscr{L}_{电磁}$ 比起(10.22)式缺少交乘项如 $\sum_{\mu,\nu}(\partial A_{\mu}/\partial x_{\nu})(\partial A_{\nu}/\partial x_{\mu})$. 利用部分积分法和洛伦兹条件很容易证实这个交乘项对总拉氏函数的积分贡献为零,即

$$\int\sum_{\mu,\nu}\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}}\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\mu}}\mathrm{d}^3x=-\int\sum_{\mu,\nu}A_{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\left(\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\nu}}\right)\mathrm{d}^3x=0. \tag{27.5}$$

所以(27.3)和(10.22)式是等价的.

相互作用引起电子的质量作如下改变:

$$m_0\to m=m_0+\delta m. \tag{27.6}$$

δm 代表电子的电磁质量. m 为实际上观察到的质量. 电磁作用所引起的电荷的改变可以有两个来源:一个来源是作为电子和电磁场的作用常数的 e_0 本身由于相互作用而引起的改变,另一个来源是由于相互作用而引起的场算符归一化的改变. 这些改变为:

$$\begin{gathered}e_0=Z_1Z_2^{-1}Z_3^{-1/2}e;\\ \psi(x)=\sqrt{Z_2}\psi_1(x),\quad \bar{\psi}(x)=\sqrt{Z_2}\bar{\psi}_1(x),\\ A_{\mu}(x)=\sqrt{Z_3}A_{1\mu}(x).\end{gathered} \tag{27.7}$$

式中 Z_1,Z_2,Z_3 为代表电荷改变的重新归一化因子. 在(27.1)—(27.4)中代入(27.7)得

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{1电子}+\mathscr{L}_{1电磁}+\mathscr{L}_{1相互}, \tag{27.8}$$

$$\mathscr{L}_{1电子}=-\frac{1}{2}\bar{\psi}_1\sum_{\mu}\gamma_{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\psi_1+\frac{1}{2}\sum_{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\bar{\psi}_1\gamma_{\mu}\psi_1-m\bar{\psi}_1\psi_1, \tag{27.9}$$

$$\mathscr{L}_{1电磁} = -\frac{1}{2}\sum_{\mu}\sum_{\nu}\frac{\partial A_{1\mu}}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_{1\mu}}{\partial x_\nu}, \tag{27.10}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{1相互} = & ie\sum_{\mu}\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1A_{1\mu} \\ & -\frac{1}{2}(Z_3-1)\sum_{\mu}\sum_{\nu}\frac{\partial A_{1\mu}}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_{1\mu}}{\partial x_\nu} \\ & -(Z_2-1)\left[\frac{1}{2}\bar{\psi}_1\sum_{\mu}\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi_1 - \frac{1}{2}\sum_{\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1 + m\bar{\psi}_1\psi_1\right] \\ & + ie(Z_1-1)\sum_{\mu}\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1A_{1\mu} + \delta mZ_2\bar{\psi}_1\psi_1. \end{aligned} \tag{27.11}$$

(27.9)式中的 m 为实验观察到的电子质量，这正是我们通常所用的自由电子场的拉氏函数密度.(27.11)式里除去右边第一项代表通常的相互作用拉氏函数外，所有其余的项都代表所谓"抵消项". 在过去的理论里，由于没有考虑 $m, e, \psi_1, A_{1\mu}$ 等与 m_0, e_0, ψ, A_μ 等之间的区别，这就等于忽略去了所有的抵消项.

由(27.7)式给出的场算符的重新归一化，实际上就是在通常微扰论计算中必须考虑的波函数(或态矢量)的重新归一化. 例如，在康普顿散射问题里始态的态矢量为

$$\Psi_i = a_r^*(\boldsymbol{p})c_i^*(\boldsymbol{k})|0\rangle, \tag{27.12}$$

$a_r^*(\boldsymbol{p})$和 $c_i^*(\boldsymbol{k})$代表自由(裸)电子和自由(裸)光子的放出算符. Ψ_i 满足归一化条件，

$$\Psi_i^+\Psi_i = 1. \tag{27.13}$$

由于每个粒子在碰撞前都受到电磁相互作用，这个作用使得碰撞前的态矢量变为

$$\Psi = \Psi_i + \Psi'. \tag{27.14}$$

Ψ'代表上述态矢量的改变. 这个改变正是前面引入绝热近似时所述的入射粒子在碰撞以前经过电磁作用由裸粒子向物理粒子的转变. Ψ 作为一个态矢量必须满足 $\Psi^+\Psi=1$，因此 Ψ 所满足的归一化条件现在应改为

$$\Psi_i^+\Psi_i = 1 - \Psi'^+\Psi', \tag{27.15}$$

在得出上式时，我们曾利用 Ψ_i 和 Ψ'互相正交的条件. 上式表示 $\Psi_i^+\Psi_i<1$，因此重新按上式归一化以后的 Ψ_i 应写为

$$\Psi_i = Z_2^{1/2}Z_3^{1/2}a_r^*(\boldsymbol{p})c_i^*(\boldsymbol{k})|0\rangle. \tag{27.16}$$

此式表明，态矢量的重新归一化可以表示为场算符的重新归一化，即(27.7)式，因此(27.16)式中 Z_2, Z_3 即为(27.7)式所引入的归一化因子. 由(27.15)式我们看到 $Z_2^{1/2}Z_3^{1/2}<1$. 在由(27.4)给出的 S 矩阵(14.28)里，引入变换(27.7)式的后三式的效果等于把 $\psi(x), A_\mu(x)$直接换为 $\psi_1(x), A_{1\mu}(x)$但把 e_0 变为 $e'=e_0Z_2Z_3^{-1/2}$. 这说明场算符归一化的改变等效于电荷的改变.

如果在(27.11)式中略去所有抵消项，我们得

$$\mathscr{L}_{1相互} = \mathrm{i}e\sum_{\mu}\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1 A_{1\mu}. \tag{27.17}$$

在(27.9)和(27.17)中出现的 m 和 e 都是观察到的质量和电荷.(27.8),(27.9),(27.10)和(27.17)给出的总拉氏函数密度,如把 ψ_1 和 $A_{1\mu}$ 换成 ψ 和 A_μ,就正是我们在本节以前用来描绘相互作用的电子场和电磁场的拉氏函数.用本节的符号,前面所引入的对易关系可写为

$$\left.\begin{aligned}&[\psi_1(x),\bar{\psi}_1(x')]_+ = -\mathrm{i}S(x-x'),\\&[A_{1\mu}(x),A_{1\nu}(x')] = -\mathrm{i}\delta_{\mu\nu}D(x-x').\end{aligned}\right\} \tag{27.18}$$

相应的电子的放出和吸收算符 $a_{1r}^*(\boldsymbol{p})$ 和 $a_{1r}(\boldsymbol{p})$ 代表放出和吸收一个质量为 m、电荷为 e 的自由粒子,即

$$[a_{1r}(\boldsymbol{p}),a_{1r'}^*(\boldsymbol{p}')]_+ = \delta_{rr'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'). \tag{27.19}$$

由此得

$$[a_r(\boldsymbol{p}),a_{r'}^*(\boldsymbol{p}')]_+ = Z_2^{-1}\delta_{rr'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'). \tag{27.20}$$

用本节的符号,以前所定义的康普顿散射的始态可写为

$$\Psi_i = a_{1r}^*(\boldsymbol{p})c_{1\lambda}^*(\boldsymbol{k})|0\rangle. \tag{27.21}$$

如果我们接受(27.8),(27.9),(27.10)和(27.17)式给出的拉氏函数和(27.18)给出的对易关系作为理论的出发点,那么在 S 矩阵的计算结果里,正像当我们以(27.1),(27.2),(27.3)和(27.4)作为理论的出发点时一样,将给出质量 m 和电磁作用常数 e 的改变以及场算符归一化的改变.但是按照前面定义,m 和 e 已经代表观察到的质量和电荷,因此计算所给出的 m 和 e 等的改变是和上面定义违反的.解决这个矛盾唯一的可能是(27.11)式中的抵消项不应忽略,并且这些项对 S 矩阵的贡献恰好和上述 m 和 e 等的改变相抵消.这是"抵消项"这个名称的来源.从下面的计算,我们看到的确如此.

在抵消项中出现的参数 Z_1,Z_2,Z_3 和 δm 代表未知的"不可观察量".这些未知量必须这样选取,使得它正好抵消掉 S 矩阵里由(27.17)式贡献的所有各级的 m 和 e 等的改变.这样得出的 Z_1,Z_2,Z_3 和 δm 将是对 e 展开的级数.下面我们将指出:Z_1,Z_2,Z_3 和 δm 对 e 展开式的最低项恰好抵消掉§26中图18所给出的发散积分 J_0,J_1,C 和 L.这个抵消有两方面的意义:第一,由图18中费曼图的部分所导致的发散困难现在得到克服.第二,它指出这些发散的积分只代表"不可观察"的质量和电荷的改变,因为这些抵消项仅只代表这种改变.

为具体起见,我们将证明,如果只保留 Z_1,Z_2,Z_3 和 δm 对 e 的展开式的最低级的项,并取

$$\left.\begin{aligned}&Z_1 = 1-L,\quad Z_2 = 1-J_1,\\&Z_3 = 1+2C,\quad Z_2\delta m - J_0,\end{aligned}\right\} \tag{27.22}$$

那么在§26中所考虑的过程的 S 矩阵元里出现的发散积分即被消去.在(27.11)

式中代入(27.22)式，我们得

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{1\text{相互}} = & \, \mathrm{i}e\sum_{\mu}\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1 A_{1\mu} - C\sum_{\mu}\sum_{\nu}\frac{\partial A_{1\mu}}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_{1\mu}}{\partial x_\nu} \\
& + J_1\left[\frac{1}{2}\bar{\psi}_1\sum_{\mu}\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi_1 - \frac{1}{2}\sum_{\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1 + m\bar{\psi}_1\psi_1\right] \\
& - \mathrm{i}eL\sum_{\mu}\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1 A_{1\mu} + J_0\bar{\psi}_1\psi_1.
\end{aligned}
\tag{27.23}
$$

我们将把在费曼图中相应于上式中抵消项的新的顶点和在 S 矩阵元中出现的相应于这些新顶点的因子，列表如下：

相应于抵消项的新顶角	在 S 矩阵元中出现的新因子
p', J_0, p	$\mathrm{i}(2\pi)^4 J_0\delta^4(p-p')$
k', C, k	$-\mathrm{i}(2\pi)^4 C\delta^4(k-k')(kk')$
p', J_1, p	$\mathrm{i}(2\pi)^4 J_1(\mathrm{i}\hat{p}+m)\delta^4(p-p')$
p', L, k,ε, p	$(2\pi)^4 eL\hat{\varepsilon}\delta^4(p-p'-k)$

利用上表，我们很容易得出相应于图 25 中两个费曼图，

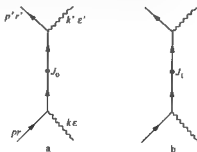


图　25

其 S 矩阵元为

$$
\begin{aligned}
&{}_0\langle p'r',k'\varepsilon'|S|pr,k\varepsilon\rangle_0 \\
&= \frac{-\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^2}\delta^4(p'+k'-p-k)\frac{m}{2\sqrt{p_0k_0p_0'k_0'}} \\
&\quad\times \bar{u}_{r'}(p')\hat{\varepsilon}'\frac{\mathrm{i}(\hat{p}'+\hat{k}')-m}{(p'+k')^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\{J_0+[\mathrm{i}(\hat{p}'+\hat{k}')+m]J_1\} \\
&\quad\times \frac{\mathrm{i}(\hat{p}+\hat{k})-m}{(p+k)^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\hat{\varepsilon}u_r(p).
\end{aligned}
\tag{27.24}
$$

这正和由(15.44)式和(26.5)式所给出的相应于92页图3所示的过程的 S 矩阵元中的发散部分互相抵消.

同样计算给出相应于图26a所示过程的 S 矩阵元为

$$
\begin{aligned}
{}_0\langle p_1'r',p_2's'|S|p_1r,p_2s\rangle_0 &= \frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^2}\delta^4(p_1'+p_2'-p_1-p_2)\frac{m^2}{\sqrt{p_{10}p_{20}p_{10}'p_{20}'}} \\
&\quad\times\sum_\mu \bar{u}_{r'}(p_1')\gamma_\mu u_r(p_1)\frac{(p_1-p_1')^2}{(p_1-p_1')^2-\mathrm{i}\varepsilon} \\
&\quad\times C\frac{1}{(p_1-p_1')^2-\mathrm{i}\varepsilon}\bar{u}_{s'}(p_2')\gamma_\mu u_s(p^2).
\end{aligned}
\tag{27.25}
$$

上式与由(26.19)式给出相应于图18中过程的 S 矩阵元里的发散部分相抵消.

同样,相应于图26b中过程的 S 矩阵元为

$$
\begin{aligned}
{}_0\langle p_1'r',p_2's'|S|p_1r,p_2s\rangle_0 &= \frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^2}\delta^4(p_1'+p_2'-p_1-p_2)\frac{m^2}{\sqrt{p_{10}p_{20}p_{10}'p_{20}'}} \\
&\quad\times \bar{u}_{r'}(p_1')\gamma_\mu u_r(p_1)L\frac{1}{(p_1-p_1')^2-\mathrm{i}\varepsilon} \\
&\quad\times \bar{u}_s(p_2')\gamma_\mu u_s(p_2).
\end{aligned}
\tag{27.26}
$$

由(26.25)我们看到上式也正和(26.20)式中的发散项互相抵消.

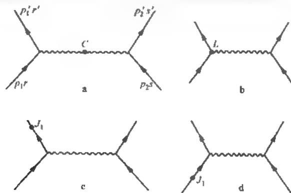


图 26

我们将不在这里推导与图 26 中过程 c 和 d 相应的 S 矩阵元. 这两个图所贡献的发散积分也正和相应于图 21 中 a 和 b 的 S 矩阵元中的发散部分互相抵消.

上面结果表明在 §26 中的计算结果里所有的发散的积分都和"抵消项"的贡献相抵消. 因为在通常的处理中这些"抵消项"已被事先略去，所以现在只要同样略去这些发散积分，即得到正确的结果.

下面我们将由(27.8)—(27.11)的规范不变性导出瓦德(Ward)恒等式. 规范不变性要求由(27.8)　(27.11)给出的拉氏函数必须只是

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mathrm{i}eA_{1\mu}$$

的函数. 同一个不变性也要求由(27.1)　(27.4)给出的原始的拉氏函数必须只是

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \mathrm{i}e_0A_\mu$$

的函数. 为着同时满足上面两个要求，我们必须有

$$e_0A_\mu = eA_{1\mu}.$$

利用(27.7)式，立刻看到上式是和下面条件等价的：

$$Z_1 = Z_2, \tag{27.27}$$

上式称为瓦德恒等式. 在旧的重正化理论里，对上式的证明是比较复杂的. 本节所给的证明直接反映出这个恒等式是规范不变性的后果. 上面这个简单的论证是由塔克答给出的.

将(27.27)式代入(27.7)的第一式得

$$e_0 = Z_3^{-1/2}e = (1+2C)^{-1/2}e. \tag{27.28}$$

它表示电子的原始电荷 e_0 和观察到的电荷 e 的差别只是由于真空极化效应所造成的. 由电子自能图 18a 所贡献的电荷改变 J_1 与顶角图 18c 所贡献的电荷改变正好互相抵消. 这个结果首先由费曼在最低级微扰修正的计算里证实，其后才由瓦德推广得出恒等式(27.27).

最后，我们将讨论一下怎样处理过去造成一定困难的"交缠发散"积分. 一个最低级的这种发散积分相应于图 27 所示的费曼图的一个部分，这是一个对电子线的 e^4 级放射修正的自能图，相应的积分为

$$\begin{aligned} K = \sum_{\mu,\nu} \frac{e^4}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\int \mathrm{d}^4k'\gamma_\mu \frac{\mathrm{i}(\hat{p}-\hat{k}')-m}{(p-k')^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon} \\ \times\gamma_\nu \frac{1}{k'^2-\mathrm{i}\varepsilon}\frac{\mathrm{i}(\hat{p}-\hat{k}'-\hat{k})-m}{(p-k'-k)^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon} \\ \times\gamma_\mu \frac{\mathrm{i}(\hat{p}-\hat{k})-m}{(p-k)^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\nu \frac{1}{k^2-\mathrm{i}\varepsilon}, \end{aligned} \tag{27.29}$$

在图 27 中包含光子线 k' 的部分可以看成是电子线和光子线 k 相互作用的顶角的

二级放射修正,因此对 k'的积分将给出代表顶角修正的发散部分 L. 同样图中包含光子线 k 的部分也可以看成是电子线和光子线 k' 相互作用的顶角的放射修正,因此对 k 的积分也将给出代表顶角修正的发散积分. 这样图 27 就可看成两个交缠在一起的顶角发散图. 由抵消项可能构成的同级的费曼图由图 28 给出. 如果和图 27 相应的积分的发散部分和图 28 中四个费曼图相应的贡献互相抵消,那么上述交缠的发散图将会给出有限的结果,而不造成任何困难. 图 28 中顶点 J_0' 和 J_1' 代表抵消项中比例于 e^4 的一部分.(其他部分将和其他类型的 e^4 级电子自能积分的发散部分相抵消)



图 27

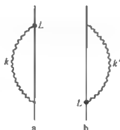


图 28

使像(27.29)式所给类型的积分收敛的条件为:

(i) 固定 k,对 k'积分给出的结果是有限的,

(ii) 固定 k',对 k 积分给出的结果是有限的,

(iii) 对 k,k'同时积分给出的结果是有限的.

(i)和(ii)是(iii)的先决条件,因为如果(i)或(ii)不给出有限的结果,那么积分(iii)将是没有意义的. 现在我们先取(27.29)式对 k'的积分. 积分结果将给出发散的顶点因子 L. 但这个发散部分和图 28a 的贡献相抵消,所以当我们同时考虑图 27 和图 28a 时,上面条件(i)是满足的. 同样可以看到如果我们同时考虑图 27 和图 28b,那么条件(ii)也是满足的.

由(27.29)式的被积函数在 k 和 k'很大时的渐近行为我们看到积分不会超过线性发散. 应用上节的考虑可以同样证明积分的发散部分可以写为

$$J_0' + (ip + m)J_1',$$

J_0' 和 J_1' 代表两个发散的积分. 这两个发散积分将和图 28c,d 两个过程的贡献相抵消.

以上我们只给出处理交缠发散积分的简单的轮廓,有兴趣的读者可以查阅有关的原始文献①.

---

① A Salam, (1951) *Phys. Rev.* **82** 217.
Matthews and Salam, (1954) *Phys. Rev.* **94** 185.

§28 结 语

场的量子理论是非相对论的量子理论推广到相对论领域的一个自然的发展.它圆满地体现出微观运动和统计规律间的联系,并正确地反映出各种形式的物质的粒子性和波动性.在电磁现象里它给出与实验完全相符的结果.尤其当重正化理论提出以后,由理论计算出的高级微扰效应和实验结果的相符更生动地显示出理论的正确性.

在强相互作用领域内,量子场论的成就并不像在电磁作用领域内那么显著.首先,由于相互作用较强,处理碰撞问题的 S 矩阵微扰展开式的合法性受到怀疑.其次,有很多迹象指出强相互作用不一定是属于可以重正化的类型的.

利用塔姆-唐可夫型的近似处理的强相互作用理论是在人工制造出 π 介子并发现 π-N 共振以后几年内的主要的发展.这个近似是量子场论里处理共振现象十分有效的理论.我们在§23和§24两节中介绍了这个理论在处理 π-N 共振和 π-π 共振问题里的应用.它获得了一定的成就.这个近似方法在其他与场论有关的领域内仍相当普遍地被应用,但在基本粒子理论里,人们的兴趣近年来主要集中于色散关系理论.在这个理论里,人们从散射矩阵的解析性和幺正性出发,不需要引人相互作用拉氏函数或哈密顿量,经过合理的近似和选择即可得出和利用场论的微扰论与塔姆-唐可夫型近似所得出的相同的结果.目前色散关系只提供出一个理论的框架,因为它并没有引入量子场论所没有的新的内容.现在基本粒子理论所遇到的困难的实质看来是这些粒子的结构对碰撞的影响并不能略去.在不可重正化的理论里,和在色散关系的普遍解里,所出现的无穷多个参数都反映出由于缺少基本粒子结构的知识所造成的不确定性.

从另一方面来看,现在形式的基本粒子理论,即使不出现上述发散困难,也是不能完全令人满意的.现在已发现的基本粒子的数目已经达到三十种之多,它们的质量分布极不规则.这样多的粒子都是基本粒子是很令人怀疑的.对于下面一些基本问题,现在的理论也不能提供任何答案:比如,为什么存在有强、弱和电磁三种相互作用?为什么只在弱作用里宇称不守恒?为什么所有带电粒子的电荷的绝对值都相同,但质量则很不一样?为什么存在着现在所发现的这些基本粒子?等等.人们有理由希望,解决了发散困难的新理论也应同时提供出这些问题的答案,正像解决了负能困难和负几率困难的量子场论,同时还进一步的阐明了微观运动与统计规律之间的联系,以及粒子和场的微观运动的更普遍的规律一样.因此,新的理论必须包含有旧理论里所没有的新因素,这个新因素将意味着在基本概念上重要的飞跃和变革.任何按照旧的观念把基本粒子内部结构简单地理解为一个连续分布,或无穷多个待定的参数的尝试,看来都是不可能解决问题的.

附录 I　在场论里引入的在洛伦兹变换下不变的几个奇异性函数

(A) 自由电磁场的各种 $D_i(x)$ 函数.

这些函数由下面三个基本的函数组成:

$$D(x) = \frac{+\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{2k_0}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx)}),$$

$$D_1(x) = \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{2k_0}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx)}),$$

$$\bar{D}(x) = \frac{1}{2}\varepsilon(x)D(x), \quad \varepsilon(x) = \frac{x_0}{|x_0|}.$$

式中 $(kx)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-k_0x_0$, 在 $c=1$ 的单位里 $x_0=t$, $k_0=|\boldsymbol{k}|$. 这三个函数可以用两种方式写成四维 k_μ 空间的积分. 第一种是通过引入 k_0 复平面里的回路积分. 图 29 给出我们将要考虑的 k_0 复平面内的各种积分路线, 这些路线分别用 C_0, C_R, C_A, C_+, C_-, C_1, C_P 和 C_F 表示. (在图中 $k=|\boldsymbol{k}|$) 很容易证实下面的关系:

$$D(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_0}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}(kx)}}{k^2},$$

$$D_1(x) = \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int_{C_1}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}}{k^2},$$

$$\bar{D}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_P}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}}{k^2} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\mathscr{P}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}}{k^2}.$$

式中 $(kx)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-k_0x_0$, $\mathscr{P}$ 代表主值积分. 注意现在的 k_0 是独立于 $\boldsymbol{k}$ 的积分变数, $\mathrm{d}^4k=\mathrm{d}k_0\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}$, $k^2=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}-k_0^2$. 对路线 C_+, C_-, C_R, C_A 和 C_F 的积分分别给出:

$$D^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_+}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}}{k^2},$$

$$D^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_-}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}}{k^2},$$

$$D_A(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_A}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}}{k^2},$$

$$D_R(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_R}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}}{k^2},$$

$$D_F(x) = \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int_{C_F}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}}{k^2}.$$

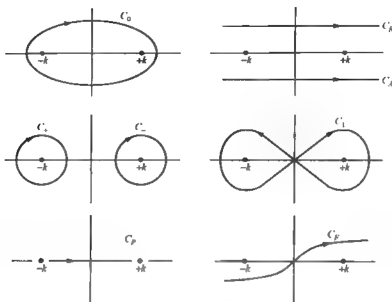


图 29

注意上面诸式除积分路线不同外，$D_1(x)$和 $D_F(x)$两式中分别多一个因子$+\mathrm{i}$和$-\mathrm{i}$. 很容易由积分路线看出下面关系：

$$D(x) = D^{(+)}(x) + D^{(-)}(x) = D_R(x) - D_A(x),$$

$$D_1(x) = \mathrm{i}[D^{(-)}(x) - D^{(+)}(x)] = \mathrm{i}[D(x) - 2D^{(+)}(x)]$$
$$= -\mathrm{i}[D(x) - 2D^{(-)}(x)],$$

$$\overline{D}(x) = D_R(x) - \frac{1}{2}D(x) = D_A(x) + \frac{1}{2}D(x),$$

$$D^{(\pm)}(x) = \frac{1}{2}[D(x) \pm \mathrm{i}D_1(x)],$$

$$D_R(x) = \overline{D}(x) + \frac{1}{2}D(x) = \begin{cases} +D(x), & \text{当 } x_0 > 0, \\ 0, & \text{当 } x_0 < 0, \end{cases}$$

$$D_A(x) = \overline{D}(x) - \frac{1}{2}D(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x_0 > 0, \\ -D(x), & \text{当 } x_0 < 0, \end{cases}$$

$$D_F(x) = -\mathrm{i}\overline{D}(x) - \frac{1}{2}D_1(x) = \begin{cases} -\mathrm{i}D^{(-)}(x), & \text{当 } x_0 > 0, \\ \mathrm{i}D^{(+)}(x), & \text{当 } x_0 < 0. \end{cases}$$

这些函数另一种四维 k_μ 空间表示的方式是把上式分母中的 k^2 换成 $k^2 - \mathrm{i}\varepsilon$，$\varepsilon$ 在积分后趋于零，在 k_0 复平面内被积函数的极点位置变成如图 30 如示，很容易看出 $D_F(x)$的式子可写为

$$D_F(x)=\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}}{k^2-\mathrm{i}\varepsilon},$$

上式中对 k_0 的积分是沿实轴进行的，利用下面的展开式


图 30

$$\frac{1}{k^2\mp\mathrm{i}\varepsilon}=\pm\mathrm{i}\pi\delta(k^2)+\mathscr{P}\frac{1}{k^2}\equiv 2\mathrm{i}\pi\delta_\pm(k^2),$$

于是我们得到

$$\overline{D}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\mathscr{P}\frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)},$$

$$D_1(x)=\frac{-1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\delta(k^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)},$$

$$D(x)=\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\varepsilon(k_0)\delta(k^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)},$$

$$D_R(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\left[\mathrm{i}\pi\varepsilon(k_0)\delta(k^2)+\mathscr{P}\frac{1}{k^2}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)},$$

$$D_A(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\left[-\mathrm{i}\pi\varepsilon(k_0)\delta(k^2)+\mathscr{P}\frac{1}{k^2}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}.$$

我们可以导出下列等式：

$$\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\varepsilon(k_0)\delta(k^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}=\varepsilon(x_0)\delta(x^2),$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\mathscr{P}\frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}=\pi\delta(x^2),$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\pi\delta(k^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}=-\mathscr{P}\frac{1}{x^2}.$$

由后面两式得

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\pi\delta_\pm(k^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}=\mp\mathrm{i}\delta_\pm(x^2).$$

上面结果表示 $\delta_\pm(k^2)$ 和 $\varepsilon(k_0)\delta(k^2)$ 是四维傅里叶变换算符的本征函数，本征值为 $+\mathrm{i}$ 或 $-\mathrm{i}$. 利用上面结果我们立刻得到

$$D_F(x)=\frac{-1}{(2\pi)^2}\delta_+(x^2),$$

$$\overline{D}(x)=\frac{1}{4\pi}\delta(x^2),$$

$$D(x)=\frac{1}{2\pi}\varepsilon(x_0)\delta(x^2),$$

$$D_R(x)=\frac{1}{4\pi}(1+\varepsilon(x_0))\delta(x^2),$$

$$D_A(x)=\frac{1}{4\pi}(1-\varepsilon(x_0))\delta(x^2).$$

利用

$$\delta(k^2)=\frac{1}{2k}\{\delta(k_0-k)+\delta(k_0+k)\},$$

$$\delta(x^2)=\frac{1}{2r}\{\delta(x_0-r)+\delta(x_0+r)\},$$

我们得

$$D(x)=\frac{1}{4\pi r}\{\delta(x_0-r)-\delta(x_0+r)\},$$

$$D_R(x)=\frac{1}{4\pi r}\delta(x_0-r),$$

$$D_A(x)=\frac{1}{4\pi r}\delta(x_0+r).$$

$D_R(x)$和$D_A(x)$分别代表通常波动方程的推迟解和超前解.考虑时空中任意两点x_1和x_2,我们得

$$D_R(x_1-x_2)=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}\{\delta(t_1-t_2-|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)\}.$$

上式只有当x_1在通过x_2点的"将来光锥"时才不等于零.它代表由x_2点产生的影响以光的速度传播到x_1.

(B) 自由介子场的各种$\Delta(x)$函数.

只需要把上面的k^2换为$k^2+\mu^2$,所有的$D_i(k^2)$函数都变为相应的$\Delta_i(k^2)$函数:

$$\Delta(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_0}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{i(kx)}}{k^2+\mu^2}=\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\varepsilon(k_0)\delta(k^2+\mu^2)\mathrm{e}^{i(kx)},$$

$$\Delta_1(x)=\frac{i}{(2\pi)^4}\int_{C_1}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{i(kx)}}{k^2+\mu^2}=\frac{-1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\delta(k^2+\mu^2)\mathrm{e}^{i(kx)},$$

$$\bar{\Delta}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_p}\frac{\mathrm{e}^{i(kx)}}{k^2+\mu^2}=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\mathscr{P}\frac{1}{k^2+\mu^2}\mathrm{e}^{i(kx)},$$

$$\Delta^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_+}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{i(kx)}}{k^2+\mu^2}=\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\frac{1-\varepsilon(k_0)}{2}\delta(k^2+\mu^2)\mathrm{e}^{i(kx)},$$

$$\Delta^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_-}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{i(kx)}}{k^2+\mu^2}=\frac{+\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\frac{1+\varepsilon(k_0)}{2}\delta(k^2+\mu^2)\mathrm{e}^{i(kx)},$$

$$\Delta_A(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_A}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{i(kx)}}{k^2+\mu^2}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\left[-\mathrm{i}\pi\varepsilon(k_0)\delta(k^2+\mu^2)+\mathscr{P}\frac{1}{k^2+\mu^2}\right]\mathrm{e}^{i(kx)},$$

$$\Delta_R(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_R}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{i(kx)}}{k^2+\mu^2}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\left[\mathrm{i}\pi\varepsilon(k_0)\delta(k^2+\mu^2)+\mathscr{P}\frac{1}{k^2+\mu^2}\right]\mathrm{e}^{i(kx)},$$

$$\Delta_F(x)=\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int_{C_F}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}}{k^2+\mu^2}=\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}}{k^2+\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon}.$$

利用

$$k^2+\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon=\boldsymbol{k}^2+\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon-k_0^2=(\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon}-k_0)(\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon}+k_0),$$

我们可写

$$\frac{-1}{k^2+\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon}=\frac{1}{(k_0-\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon})(k_0+\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon})}.$$

因 ε 是一个很小的数，并且在积分后将趋于零，所以上式可写为

$$\frac{-1}{k^2+\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon}=\frac{1}{(k_0-\omega_k+\mathrm{i}\varepsilon)(k_0+\omega_k-\mathrm{i}\varepsilon)},$$

式中 $\omega_k=\sqrt{\boldsymbol{k}^3+\mu^2}$. 于是我们得到

$$\Delta_F(x)=\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}}{(k_0-\omega_k+\mathrm{i}\varepsilon)(k_0+\omega_k-\mathrm{i}\varepsilon)}.$$

不难看出，下面几个式子也是正确的：

$$\Delta_R(x)=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}}{(k_0-\omega_k+\mathrm{i}\varepsilon)(k_0+\omega_k+\mathrm{i}\varepsilon)},$$

$$\Delta_A(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}}{(k_0-\omega_k-\mathrm{i}\varepsilon)(k_0+\omega_k-\mathrm{i}\varepsilon)},$$

$$\Delta^{(\mp)}(x)=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}}{2\omega_k(k_0\mp\omega_k\pm\mathrm{i}\varepsilon)}\quad(\text{当 } t\gtrless 0).$$

为着得出 $\Delta_1(x)$ 函数积分后的表达式，利用下面等式，

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\mathscr{P}\frac{1}{k^2+\mu^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}=\pi\delta(x^2)-\begin{cases}\dfrac{\pi\mu}{2\sqrt{-x^2}}\mathrm{J}_1(\mu\sqrt{-x^2}), & x^2<0,\\ 0, & x^2>0,\end{cases}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4k\,\pi\delta(k^2+\mu^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}=\begin{cases}\dfrac{\mu}{2\sqrt{-x^2}}\mathrm{N}_1(\mu\sqrt{-x^2}), & x^2<0,\\ \dfrac{\mu}{\pi\sqrt{x^2}}K_1(\mu\sqrt{x^2}), & x^2>0.\end{cases}$$

式中 J_1 和 N_1 代表贝塞尔和诺依曼函数，K_1 为虚宗量的贝塞尔函数. 我们得

$$\bar{\Delta}(x)=\frac{1}{4\pi}\delta(x^2)-\begin{cases}\dfrac{1}{8\pi}\dfrac{\mu}{\sqrt{-x^2}}\mathrm{J}_1(\mu\sqrt{-x^2}), & x^2<0,\\ 0, & x^2>0.\end{cases}$$

$$\Delta_1(x)=-\frac{\mu^2}{4\pi}\times\begin{cases}\dfrac{1}{\mu\sqrt{-x^2}}\mathrm{N}_1(\mu\sqrt{-x^2}), & x^2<0,\\ \dfrac{2}{\pi\mu\sqrt{x^2}}\mathrm{K}_1(\mu\sqrt{x^2}), & x^2>0.\end{cases}$$

(C) 费米粒子的 $S_i(x)$ 函数.

这个函数和 $\Delta_i(x)$ 的关系为

$$S_i(x) = \left(-\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\Delta_i(x),$$

式中 i — $(\pm)$, A, R, $F\cdots$. 我们常用的 $S_F(x)$ 的表达式为

$$S_F(x) = \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int_{C_F} \mathrm{d}^4 k \frac{\mathrm{i}\hat{k} - m}{k^2 + m^2 - \mathrm{i}\varepsilon} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx)}.$$

附　录　Ⅱ

(1) 几个特性长度：

氢原子的半径 $a_0=\hbar^2/m_e e^2=0.529\times10^{-9}$厘米.

电子康普顿波长 $\lambda_0=\hbar/m_e c=3.862\times10^{-11}$厘米.

经典电子半径 $r_0=e^2/m_e c^2=2.818\times10^{-13}$厘米.

(2) 精细结构常数 $\alpha=e^2/\hbar c=1/137.036$.

(3) 普朗克常数 $\hbar=h/2\pi=1.042\times10^{-27}$尔格·秒.

(4) 电荷量子 $e=4.80\times10^{-10}$静电单位.

(5) 光速 $c=3\times10^{10}$厘米/秒.

(6) 碰撞截面由自然单位系统($\hbar=c=m=1$,其中 m 代表参加作用的任一粒子的质量)转换到通用单位系统：

$$\sigma(\text{通用单位})=\sigma(\text{自然单位})\times\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2.$$

(7) 衰变几率 w 和寿命 τ 由自然单位系统转换到通用单位系统：

$$w(\text{通用单位})=w(\text{自然单位})\times\frac{mc^2}{\hbar},$$

$$\tau(\text{通用单位})=\tau(\text{自然单位})\times\frac{\hbar}{mc^2}.$$

(8) 各种能量单位的转换：

1 个电子质量＝0.511 MeV.

1 个质子质量＝938 MeV.

1 MeV＝10^6 eV＝百万电子伏.

1 GeV＝10^3 MeV＝十亿电子伏.

附录Ⅲ　基本粒子的分类

类别	名称	符号，电荷	质量 MeV	自旋字称	重粒子数	同位旋 T	T_3	奇异量子数	寿命(秒)
	光子	γ	0	1^-	0				∞
轻子	中微子	ν_e	0	1/2	0				∞
		ν_μ	0	1/2	0				∞
	电子	e^-	0.51	1/2	0				∞
	μ^-子	μ	105.66	1/2	0				$(2.212\pm0.001)10^{-16}$
反轻子	反中微子	$\bar{\nu}_e$	同上	同上	同上				同上
		$\bar{\nu}_\mu$							
	正电子	e^+							
	μ^+子	μ^+							
介子	π介子	π^+	139.59 ± 0.05	0^-	0	1	+1	0	$(2.55\pm0.03)10^{-8}$
		π^0	135.00 ± 0.05	0^-	0	1	0	0	$(1.8\pm0.3)10^{-16}$
		π^-	同　π^+	0^-	0	1	−1	0	同　π^+
	K介子	K^+	493.9 ± 0.2	0	0	1/2	1/2	+1	$(1.229\pm0.008)10^{-8}$
		$K^-\equiv\widetilde{K}^+$	同　K^+	0	0	1/2	−1/2	−1	同　K^-
		K^0	497.8 ± 0.6	0	0	1/2	−1/2	+1	K_1^0：　10^{-10}
		$\widetilde{K}^0$	同　K_1^0	0	0	1/2	1/2	−1	K_2^0：　6×10^{-8}
核子	质子	p	938.256 ± 0.005	1/2	1	1/2	1/2	0	∞
	中子	n	939.550 ± 0.005	1/2	1	1/2	−1/2	0	$(1.013\pm0.029)10^3$
超子	Λ粒子	Λ	1115.36 ± 0.14	1/2	1	0	0	−1	$(2.62\pm0.03)10^{-10}$
	Σ粒子	Σ^+	1189.40 ± 0.20	1/2	1	1	+1	−1	$(0.79\pm0.03)10^{-10}$
		Σ^0	1192.3 ± 0.30	1/2	1	1	0	−1	$<0.1\times10^{-13}$
		Σ^-	1197.08 ± 0.19	1/2	1	1	−1	−1	$(1.58\pm0.05)10^{-10}$
	Ξ粒子	Ξ	1320.8 ± 0.2		1	1/2	−1/2	−2	$(1.74\pm0.05)10^{-10}$
		Ξ^0	1314.3 ± 1.0		1	1/2	1/2	−2	$(3.06\pm0.40)10^{-10}$
反核子和反超子	$\widetilde{p}^-$，$\widetilde{n}^-$，$\widetilde{\Lambda}$，$\widetilde{\Sigma}^+$，$\widetilde{\Sigma}^0$，$\widetilde{\Sigma}^-$，$\widetilde{\Xi}^-$，$\widetilde{\Xi}^0$		相同	相同	相反	相同	相反	相反	

索　引

重排后记

本书最初出版于 1964 年，成为当时国内量子场论课程的优秀教材，以及场论、粒子物理研究的重要参考书，产生了很大的影响. 在国家出版基金的资助下，《中外物理学精品书系・经典系列》将本书收入，用规范的简化汉字对其重新排版，使这本名著以新的面貌再次回到人们的视野.

在重排过程中，当年胡宁先生的助手，量子场论课程的助教，现北京大学的宋行长教授仔细地对本书进行了校订，并更正了原来版本中的一些小的差错. 再此表示诚挚的谢意.

我们希望重排本的出版，既能给如今的读者们提供领略胡宁先生风采，学习其严谨态度和探索精神的良机，同时又能成为对这位老一辈物理学家的最好的纪念.

北京大学出版社
2012 年 4 月